

МАШИНОСТРОЕНИЕ

Научная статья

УДК 62-135.1

EDN: UQVSFA

DOI: 10.21285/1814-3520-2025-2-194-203



Разработка математических моделей, численных методов и программного обеспечения для анализа долговечности радиальных роторов турбомашин с расстройкой параметров

О.В. Репецкий¹✉¹Иркутский государственный аграрный университет имени А.А. Ежовского, Иркутск, Россия

Резюме. Цель – развитие математических моделей и численно-аналитических методов анализа статических напряжений, свободных и вынужденных колебаний, а также долговечности энергетических и транспортных турбомашин радиального типа с учетом преднамеренной расстройки геометрических, массовых и механических параметров. В качестве базового метода исследования выбран метод конечных элементов. В настоящей работе использованы теории упругости и колебаний, механика деформируемого твердого тела и газовая динамика. Применены матричные вычисления и методы решения алгебраических систем уравнений. Развита математическая модель и численные методы для прогнозирования ресурсных характеристик рабочих колес турбомашин. Созданы оригинальные программы, имеющие интерфейс стыковки с коммерческой программной системой ANSYS. Проведенные комплексные расчетные исследования влияния преднамеренной расстройки на уровень динамических нагрузок и долговечность рабочих колес радиальных турбомашин показали высокий уровень воздействия расстройки параметров на ресурсные характеристики роторных конструкций как модельных, так и промышленных компрессоров и турбин. Так, для реальной радиальной установки фирмы Schiele AG (Германия) для перекачки и вентиляции воздуха варьирование долговечности рабочего колеса турбомшины составило от -10,76 до +14,84%. Результаты численного анализа и программное обеспечение внедрены в 2024 г. в проектную деятельность АО «Иркутский научно-исследовательский и конструкторский институт химического и нефтяного машиностроения» (г. Иркутск). Проведенные вычислительные эксперименты демонстрируют эффективность предложенного подхода для прогнозирования долговечности и прочностной оптимизации конструкций роторов радиальных турбомашин при проектировании и доводке новых изделий или продлении остаточного эксплуатационного ресурса. Предложенный подход является рабочим инструментом для дальнейшего исследования и анализа влияния расстройки параметров рабочих лопаток на ресурсные характеристики рабочих колес осевых и радиальных турбомашин.

Ключевые слова: математические модели, вычислительный эксперимент, численные методы анализа, преднамеренная расстройка параметров, радиальные турбомшины, долговечность

Финансирование. Данная работа выполнена в рамках гранта РНФ № 24-29-00135. Автор благодарит РНФ за поддержку настоящих исследований.

Для цитирования: Репецкий О.В. Разработка математических моделей, численных методов и программного обеспечения для анализа долговечности радиальных роторов турбомашин с расстройкой параметров // iPolytech Journal. 2025. Т. 29. № 2. С. 194–203. <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2025-2-194-203>. EDN: UQVSFA.

MECHANICAL ENGINEERING

Original article

Development of mathematical models, numerical methods, and software tools for analyzing the durability of radial turbomachinery with parameter mismatching

Oleg V. Repetskii¹✉¹Irkutsk State Agrarian University named after A.A. Ezhevsky, Irkutsk, Russia

Abstract. This study presents mathematical models and numerical-analytical methods for analysing static stresses, free/forced vibrations, and the durability of radial turbomachinery used in power and transportation systems. The research incorporates deliberate disturbances in geometric, mass, and mechanical parameters to evaluate their effects. The finite element method is used as the primary analytical tool, supported by the theories of

elasticity and vibration, the mechanics of deformable solids, and gas dynamics. The methodology employs matrix computations and algebraic equation systems to predict the service life characteristics of turbomachine rotors. Custom software interfaces compatible with ANSYS commercial software were developed. Computational studies demonstrated the influence of deliberate parameter mismatches on dynamic loads and durability in both prototype and industrial compressors/turbines. For a radial air handling unit manufactured by Schiele AG (Germany), parameter variations resulted in the alteration of rotor service life characteristics by –10.76% to +14.84%. The numerical analysis tools were implemented in 2024 at the Irkutsk Research and Design Institute of Chemical and Petrochemical Engineering (Russia). The efficiency of the method for durability prediction and strength optimisation during rotor design, fine-tuning, or residual life extension was confirmed by computational experiments. This approach provides a practical tool for further research on the influence of blade parameter mismatches on service life characteristics in axial and radial turbomachines.

Keywords: mathematical models, computational experiment, numerical analysis methods, deliberate parameter mistuning, radial turbomachines, durability

Funding. This work was carried out within the framework of the Russian Science Foundation grant No. 24-29 00135. The author thanks the Russian Science Foundation for the support of the study.

For citation: Repetskii O.V. Development of mathematical models, numerical methods, and software tools for analyzing the durability of radial turbomachinery with parameter mismatching. *iPolytech Journal*. 2025;29(2):194-203. (In Russ.). <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2025-2-194-203>. EDN: UQVSFA.

ВВЕДЕНИЕ

Известные экспериментальные и теоретические работы других авторов показывают, что влияние расстройки параметров на вибрационные характеристики лопаток и дисков исследовано достаточно давно. Среди более ранних работ упоминают научные труды Д.Дж. Эйванс и З.С. Хан [1, 2], в которых показано решающее влияние увеличения амплитуды в расстроенных системах. В то же время были разработаны вычислительные модели для описания расстроенных колебательных систем, например Л.Е. Эль-Байоми, А.В. Шринивасан [3]. Также в более поздних работах по этой теме исследовано моделирование данной проблемы в основном на дискретных связанных пружинно-массовых колебательных системах Д.М. Файнера, Дж.А. Кеньона, Дж.Х. Гриффи-на [4, 5], А.Дж. Ривас-Гуэрра, М.П. Миньоле [6], Е.П. Петрова [7], М. Николича, Е.П. Петрова и Д.Дж. Эйванс [8]. Результаты исследований чаще подтверждаются и уточняются благодаря применению современных компьютерных технологий, позволяющих выполнять численные расчеты на реальных конструкциях лопаток роторов турбомашин. В этом контексте особый интерес представляет диссертационная работа Т. Клауке², в которой подробно анализируется явление расстройки параметров и его влияние на ресурсные характеристики реальных рабочих колес. Кроме того, расстроенные рабочие колеса изучаются как в экспериментальных,

так и в численных исследованиях, что отражено в публикациях [9, 10].

Целью исследования данной работы является анализ воздействия конструктивных и технологических факторов, включая преднамеренную расстройку параметров, на увеличение ресурсных характеристик турбомашин, с использованием примера радиально-го рабочего колеса.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Расчет ресурсных характеристик проведен на реальном радиальном колесе с применением МКЭ. На рис. 1 – общий вид и конечноеэлементная модель конструкции [11, 12].

Представленные в настоящей работе численные результаты получены с помощью МКЭ и верифицированы на многочисленных вычислительных тестах, в том числе на модельных задачах: пластинах и академических радиальных рабочих колесах. Настоящее исследование обосновывает применяемую степень дискретизации КЭМ, выбор типа конечного элемента, включая анализ моделей стыковки трехмерных и оболочечных конечных элементов, сравнение с известными расчетными и экспериментальными данными, а также аналитическими решениями для тестовых моделей [18]. Выполненный анализ позволил уточнить предлагаемые автором математические модели и выбрать наиболее эффективные по точности расчета и затратам времени ЭВМ при исследовании стати-

²Klaue T. Schaufelschwingungen realer integraler verdichterräder im hinblick auf verstimmung und lokalisierung: Dissertation Doktor-Ingenieurs. Tönning, 2007.

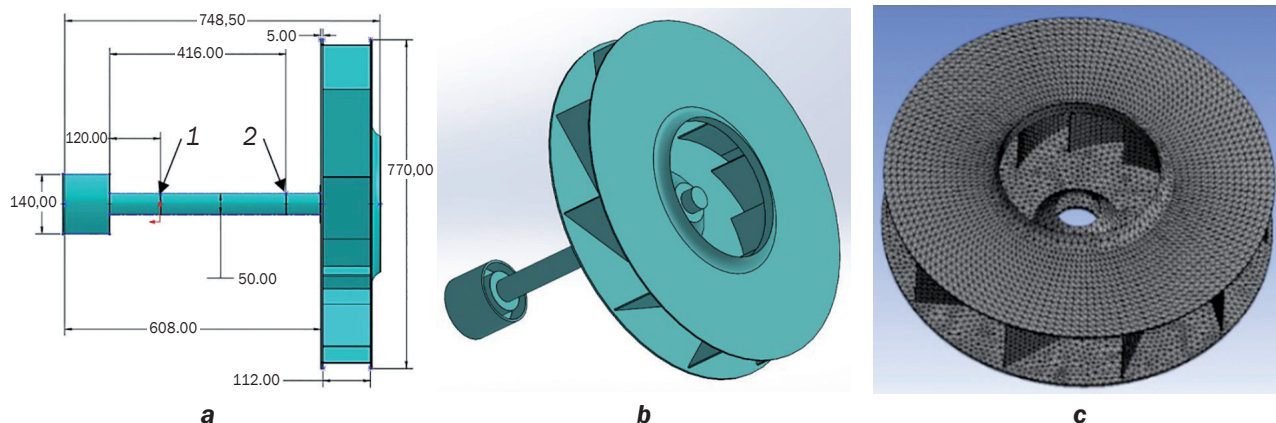


Рис. 1. Радиальное рабочее колесо с десятью лопатками: а – размеры колеса; б – 3D модель; с – конечноэлементная модель

Fig. 1. 10-bladed radial impeller: a – impeller dimensions; б – 3D model; с – finite element model

ческих напряжений, собственных частот и форм колебаний, а также чувствительности и других параметров, с учетом вращения и температурного нагрева, и применить их в дальнейшем для анализа реальных радиальных рабочих колес турбомашин.

Масса рабочей лопатки (кг) может быть определена из выражения [10–12]:

$$m_i = m_0 + \Delta m_i, \quad (1)$$

здесь m_i – масса i -й лопатки, кг; m_0 – среднее значение масс лопатки, кг; Δm_i – отклонение массы i -й рабочей лопатки турбомшины, кг.

Дисбаланс рабочего колеса U имеет численный вид:

$$U = R_0 \sqrt{\left(\sum_{i=1}^N \Delta m_i \cos \theta_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N \Delta m_i \sin \theta_i \right)^2}, \quad (2)$$

где θ_i – угол, определяющий положение i -й лопатки на диске, начиная с 1-й лопатки, °; R_0 – средний радиус центра тяжести исследуемой механической системы, м.

Коэффициент увеличения амплитуды γ описывает отношение максимального перемещения расстроенной системы к максимальному перемещению настроенной системы и равен

$$\gamma = \frac{\delta_{\text{расс. (максимум)}}}{\delta_{\text{настр. (максимум)}}}. \quad (3)$$

Максимальный коэффициент увеличения амплитуды [15]

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{N}), \quad (4)$$

где N – число лопаток в рабочем колесе.

Алгоритм применения программы ANSYS Workbench для определения коэффициентов увеличения амплитуды конструкций включает следующие основные этапы:

- *подготовку исходных данных* – это определение геометрических параметров конструкции, задание физических свойств материала, формулировка граничных условий, включая условия закрепления и внешние нагрузки;

- *создание конечно-элементной модели* – генерация сетки конечных элементов, оптимизация сетки для повышения точности расчетов при минимальном числе элементов;

- *формирование и решение математической модели* – определение элементов в локальных координатах, вычисление матриц жесткости и массы, преобразование локальных матриц в глобальную систему координат, формирование глобальных матриц жесткости и массы всей конструкции;

- *расчет собственных колебаний конструкции* – вычисление собственных частот и форм, сравнение полученных результатов с первоначальными данными для определения значений расстройки;

- *обработка и интерпретация результатов* – построение графиков распределения амплитуд колебаний, оценка динамических напряжений и перемещений в различных режимах нагружения. Затем осуществляется *сохранение результатов* для дальнейшего анализа.

Расстройка параметров приводит к увеличению амплитуд колебаний и динамических напряжений по сравнению с идеальной системой. В данной работе применен метод конечных элементов (МКЭ), реализованный в коммерческой программе ANSYS для определения максимальных перемещений и напряжений с учетом расстройки лопаток радиального колеса.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На первой стадии исследованы численные модели с одинаковыми лопатками толщиной 3,3 мм. При этом 1-й тип анализа описывал изменение толщины всех лопаток на -10%, а 2-й – на +10% (рис. 2). В вариантах № 3 и 4 предполагается уве-

личение толщины лопатки на 10% на середине пера и уменьшение толщины на 10% на двух краях кромки. В варианте № 5 толщина лопатки увеличена на 20% на середине пера и уменьшена на 20% на двух краях кромки.

Также исследовано различное (линейное или криволинейное) изменение длины всех лопаток (рис. 3, варианты № 1–4). Результаты анализа представлены в виде графика распределения долговечности блочных моделей, в которых геометрия всех лопаток колеса была изменена. Этот график приведен на рис. 4, при условии трапецевидного нагружения лопатки и всего рабочего колеса, схематически изображенного на рис. 5 [11, 12], где s – ширина сопловой части, μ – рассто-

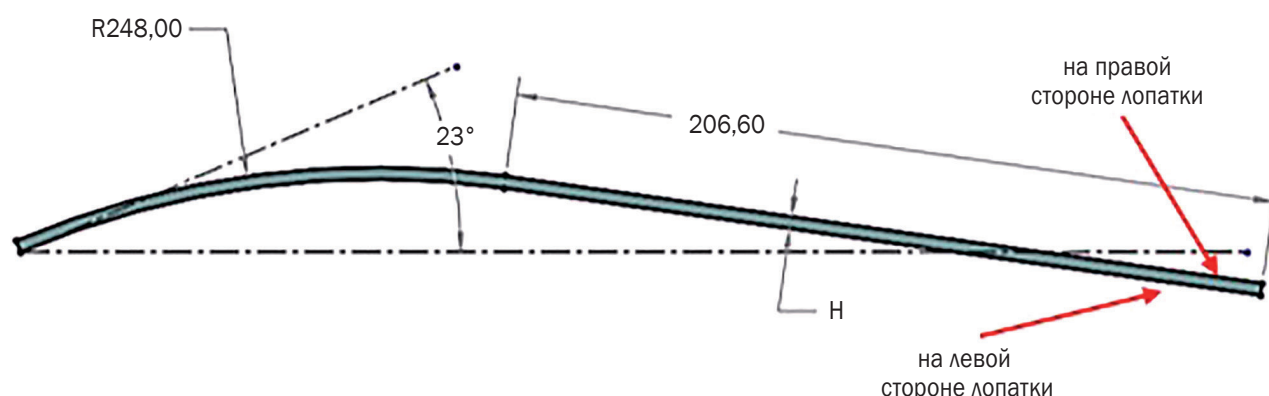


Рис. 2. Исходный вид лопатки для исследования расстройки от толщины H (мм)
Fig. 2. Initial view of the radial blade to study thickness-dependent mistuning H (mm)

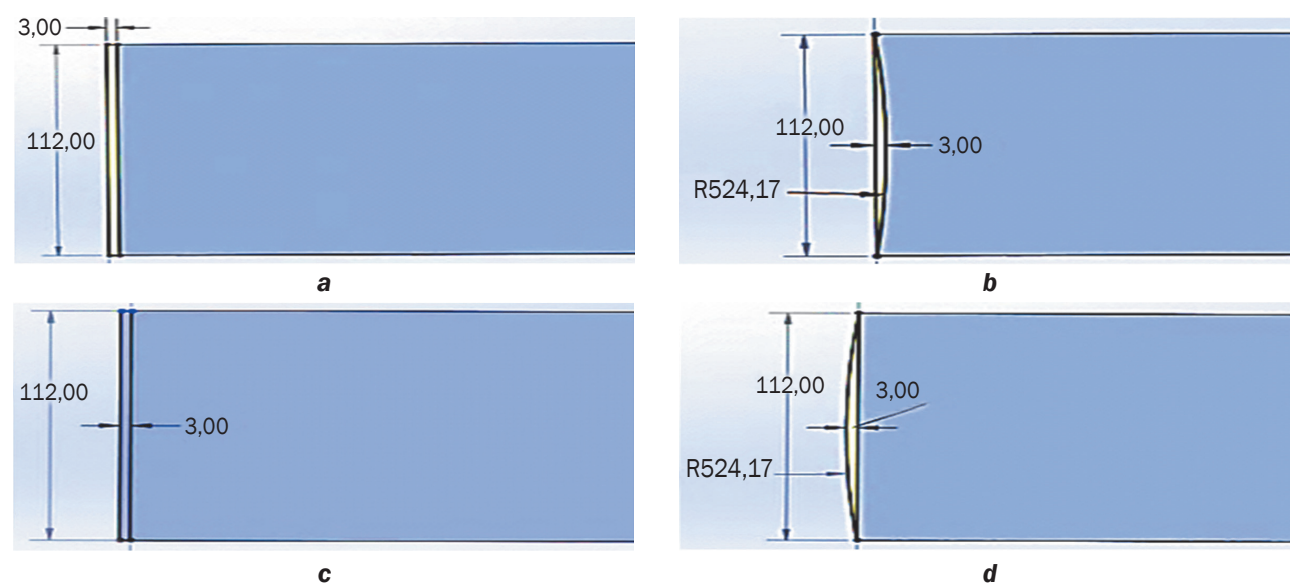


Рис. 3. Предложенные варианты изменения радиальной лопатки: а – вариант № 1 (линейная отрезка); б – вариант № 2 (линейное удлинение); с – вариант № 3 (криволинейная отрезка); д – вариант № 4 (криволинейное увеличение длины)
Fig. 3. Proposed options for radial blade alterations: а – option no. 1 (linear section); б – option no. 2 (linear extension); с – option no. 3 (curved section); д – option no. 4 (curved increase in length)

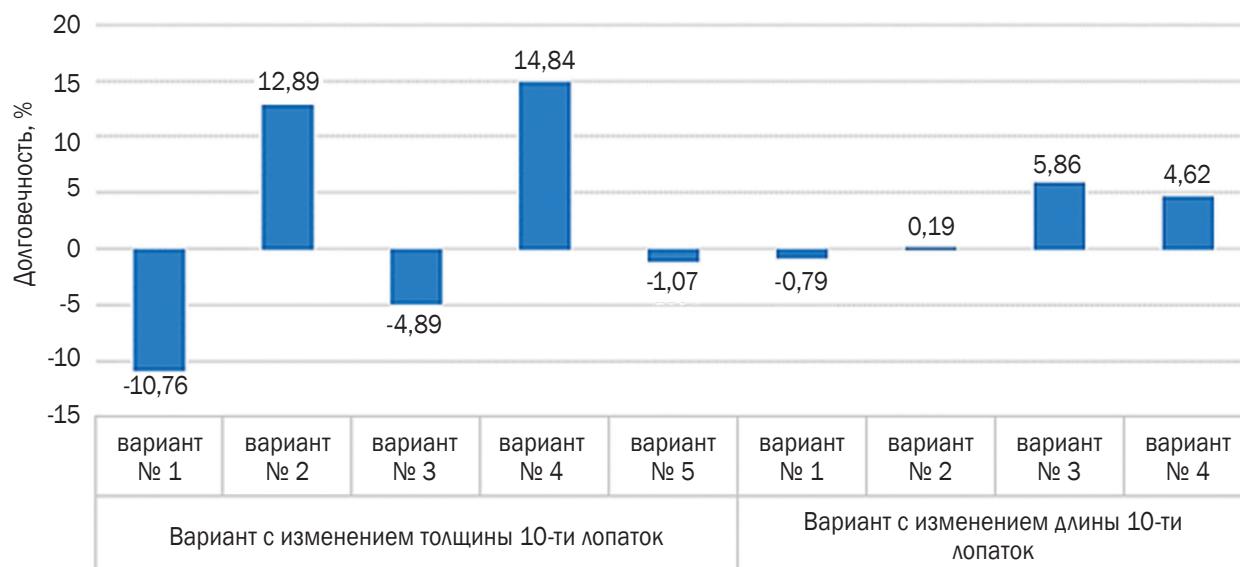


Рис. 4. Долговечность на уровне блочных моделей с изменением всех лопаток колеса

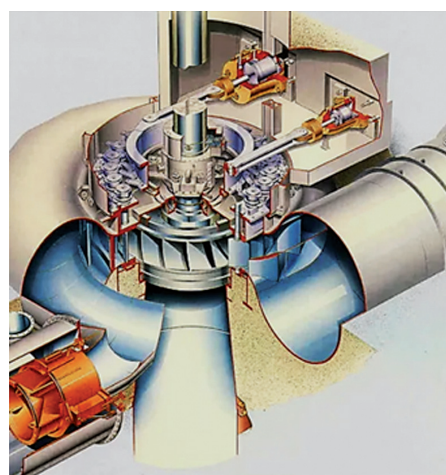
Fig. 4. Durability of block models with changed impeller blades

яние между лопатками статора в сопловой части.

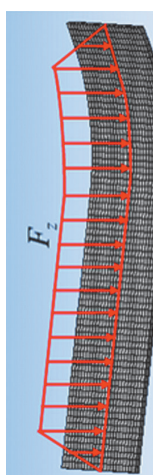
Для расчета ресурсных характеристик, а именно долговечности лопаток колеса (рис. 4 и табл. 2) в зависимости от конструктивных и технологических факторов, используется известная математическая модель, основанная на гипотезе повреждаемости Пальмгрен-Майнера, суммирование поврежде-

ний разного уровня происходит по методу «дождя». Долговечность рассчитывается как количество циклов нагружения до наступления разрушения, когда накопленное усталостное повреждение становится равным единице [11, 12, 17, 20].

Расчет долговечности выполнен на основе программы коммерческой программы ANSYS и авторской программы³.



a



b

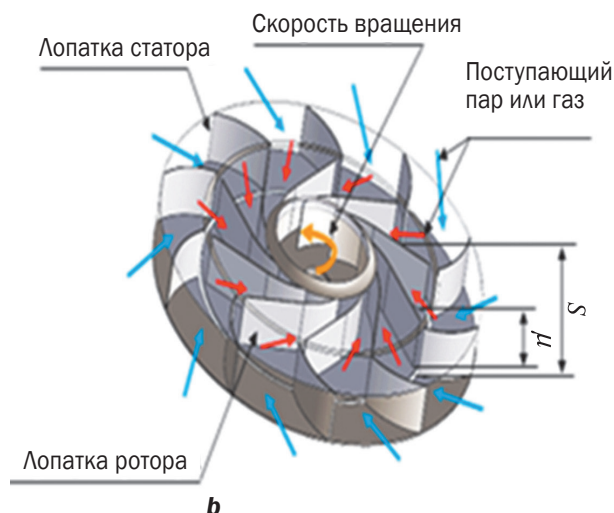


Рис. 5. Общий вид и модель трапециевидного спектра нагружения радиального рабочего колеса: а – общий вид радиального колеса; б – распределение нагрузки на лопатке

Fig. 5. General view and a model of the trapezoidal loading spectrum of radial impeller: а – general view of a radial wheel; б – load distribution on the blade

³Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023665054, Российская Федерация. Программа для расчета ресурсных характеристик радиальных рабочих колес с учетом динамической нагрузки (RES_RAD) / О.В. Репецкий, Динь Кыонг Хоанг; заявитель и патентообладатель ФГБОУ ВО Иркутский ГАУ. Заявка № 2023663623, заявл. 29.06.2023; опубл. 11.07.2023.

Анализ результата вычислительного эксперимента показал, что первая блочная модель (БМ) с увеличением толщины лопатки на 10% способна увеличить долговечность радиального рабочего колеса на +1,48% (рис. 6 а). Следовательно, БМ с изменением механических свойств материала повышает ресурс радиального колеса на +1,53% (рис. 6 б), а вариант № 3 позволяет увеличить долговечность радиального колеса на +2,01% (рис. 6 с).

На следующем этапе проведен анализ влияния количества и глубины нарезных каналов на основном диске колеса для оценки ресурсных характеристик радиального рабочего колеса. Примеры с четырьмя и восьмью каналами между лопатками приведены на рис. 7.

Формула для массы рабочего колеса с учетом количества и глубины каналов может быть записана в следующем варианте:

$$\Delta m \approx 0,08875ka, \quad (5)$$

где Δm – изменение массы основного диска; k – количество нарезных каналов в одном секторе колеса ($k = 1, \dots, 8$); a – глубина нарезных каналов.

Из рис. 8 видно, что с увеличением количества нарезных каналов на основном диске площадь синей зоны уменьшается. Данный эффект указывает на рост скорости потока в колесе при увеличении количества нарезных каналов в каждом секторе.

Результаты расчета показали, что наличие нарезных каналов на радиальном рабочем колесе способствует увеличению его долговечности. В табл. 2 приведены значения долговечности радиального рабочего колеса с учетом наличия нарезных каналов.

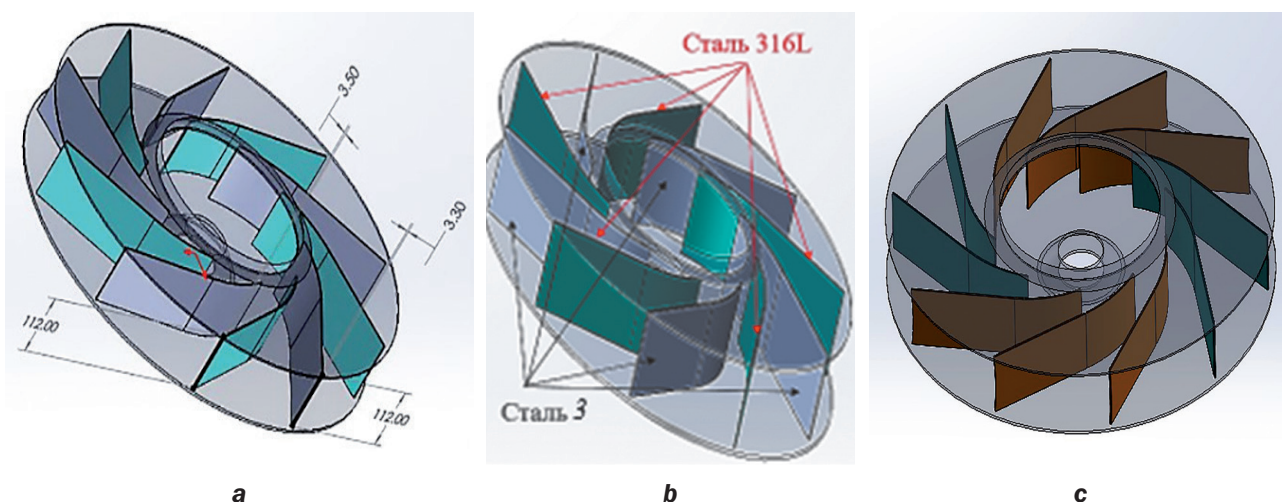


Рис. 6. Блочные модели с увеличением толщины (а), разными материалами (б), криволинейным отрезом (с)
Fig. 6. Block models with the thickness increased with (a), different materials (b), curved section (c)

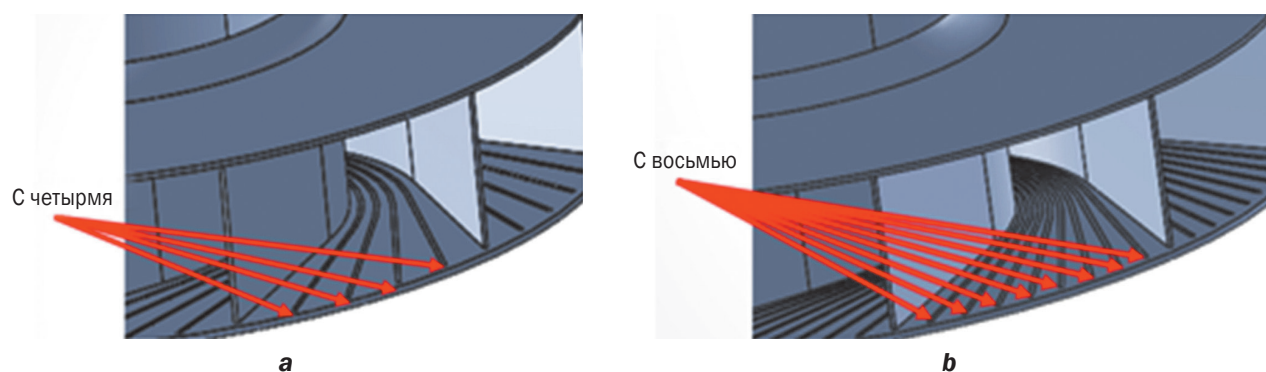


Рис. 7. Анализ количества нарезных каналов в секторе радиального колеса
Fig. 7. Analysis of the number of grooves in a radial wheel sector

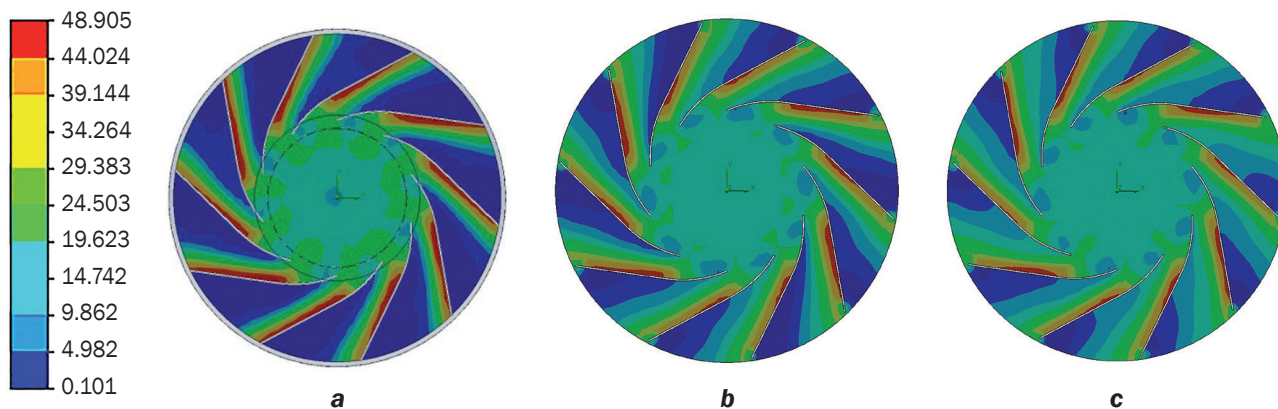


Рис. 8. Скорость потока: а – без нарезного канала; b – с четырьмя каналами; с – с восемью каналами
Fig. 8. Flow rate: a – without a groove; b – with four grooves; c – with eight grooves

Таблица 2. Количество циклов до разрушения
Table 2. Number of cycles before destruction

Вид	Долговечность (в циклах)	$\Delta N, \%$
С четырьмя нарезными каналами	$2,1764 \cdot 10^5$	+3,95
С восемью нарезными каналами	$2,2950 \cdot 10^5$	+9,61

Проведенный анализ демонстрирует, что увеличение количества нарезных каналов на основном диске напрямую способствует повышению долговечности конструкции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе проведенного математического моделирования и численного анализа определены ресурсные характеристики радиальных турбомашин без и с расстройкой параметров. Анализ результатов показал, что могут существенно меняться максимальный коэффициент увеличения амплитуды (до 44,72%) и долговечность радиального колеса турбомшины от -10,76 до +14,84%.

Использование МКЭ позволило провести численное моделирование и выявить закономерности влияния расстройки на усталостную долговечность реального радиального рабочего колеса, применяемого

в химическом и вентиляционном оборудовании.

Результаты вычислительных экспериментов подтвердили эффективность разработанных моделей и алгоритмов, а также показали возможность их применения для прогнозирования ресурса и оптимизации конструкций роторов радиальных турбомашин. Полученные данные могут быть использованы при проектировании новых турбомашин и совершенствовании существующих конструкций в целях повышения их эксплуатационной надежности и долговечности в рабочих условиях.

Настоящее исследование вносит вклад в развитие методов расчета динамических и ресурсных характеристик турбомашин и открывает перспективы для дальнейших исследований в области оптимизации долговечности радиальных роторных конструкций с учетом эксплуатационных факторов.

Список источников

1. Ewins D.J. Vibration modes of mistuned bladed disks // Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. 1976. Vol. 98. Iss. 3. P. 349–355. <https://doi.org/10.1115/1.3446180>.
2. Ewins D.J., Han Z.S. Resonant vibration levels of a mistuned bladed disk // Journal of vibration and acoustics. 1984. Vol. 106. Iss. 2. P. 211–217. <https://doi.org/10.1115/1.3269171>.
3. El-Bayoumy L.E., Srinivasan A.V. Influence of mistuning on rotor-blade vibrations // AIAA Journal. 1975. Vol. 13. Iss. 4. P. 460–464. <https://doi.org/10.2514/3.49731>.
4. Feiner D.M., Griffin J.H. A fundamental model of mistuning for a single family of modes // Journal of Turbomachinery. 2002. Vol. 124. Iss. 4. P. 597–605. <https://doi.org/10.1115/1.1508384>.

5. Kenyon J.A, Griffin J.H. Forced response of turbine engine bladed disks and sensitivity to harmonic mistuning // *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. 2003. Vol. 125. Iss. 1. P. 113–120. <https://doi.org/10.1115/1.1498269>.
6. Rivas-Guerra A.J., Mignolet M.P. Maximum amplification of blade response due to mistuning: localization and mode shapes aspects of the worst disks // *Journal of Turbomachinery*. 2003. Vol. 125. Iss. 3. P. 442–454. <https://doi.org/10.1115/1.1506958>.
7. Petrov E.P. Analysis of sensitivity and robustness of forced response for nonlinear dynamic structures // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2009. Vol. 23. Iss. 1. P. 68–86. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2008.03.008>.
8. Nikolic M., Petrov E.P., Ewins D.J. Robust strategies for forced response reduction of bladed disks based on large mistuning concept // *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. 2008. Vol. 130. Iss. 2. P. 022501. <https://doi.org/10.1115/1.2799524>.
9. Manetti M., Giovannetti I., Pieroni N., Horculescu H., Peano G., Zonfrillo G., et al. The dynamic influence of crystal orientation on a second generation single crystal material for turbine buckets // *Power for Land, Sea, and Air: ASME Turbo Expo 2009 (Orlando, Florida, 8–12 June 2009)*. Orlando, Florida: ASME, 2009. Vol. 6. P. 125–133. <https://doi.org/10.1115/GT2009-59091>.
10. Roy S.C., Goyal S., Sandhya R., Ray S.K. Analysis of hysteresis loops of 316L(N) stainless steel under low cycle fatigue loading conditions // *Procedia Engineering*. 2013. Vol. 55. P. 165–170. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.03.237>.
11. Repetckii O.V., Cuong Hoang Dinh. Fatigue life of radial turbomachines at changing thickness blades taking into account intentional mistuning // *State and Prospects for the Development of Agribusiness – INTERAGROMASH 2022: 15th International Scientific Conference on Precision Agriculture and Agricultural Machinery Industry*. E3S Web of Conferences. 2022. Vol. 363. Iss. 1. P. 01044. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202236301044>.
12. Repetskii O.V., Cuong Hoang Dinh. Physical and mathematical modeling and computer analysis of radial impellers for chemical and power engineering, taking into account ecology // *Actual problems of the energy complex: physical processes, mining, production, transmission, processing and environmental protection: 4th International scientific and practical Conference*. IOP Conference Series. 2022. Vol. 990. P. 012044. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/990/1/012044>.
13. Kaneko Ya., Watanabe T., Furukawa T. Study on the reduction of the resonant stress of turbine blades caused by the stage interaction force (Simultaneous optimization of blade resonant stress and amount of unbalance) // *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. 2020. Vol. 143. Iss. 6. P. 061022. <https://doi.org/10.1115/1.4049471>.
14. Beck J.A., Brown J.M., Kaszynski A.A., Gillaugh D.L. Numerical methods for calculating component modes for geometric mistuning reduced-order models // *Turbomachinery Technical Conference and Exposition: ASME Turbo Expo 2021*. 2021. Vol. 9B. P. V09BT29A016. <https://doi.org/10.1115/GT2021-59126>.
15. Whitehead D.S. The maximum factor by which forced vibration of blades can increase due to mistuning // *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. 1998. Vol. 120. Iss. 1. P. 115–119. <https://doi.org/10.1115/1.2818061>.
16. Хоанг Динь Кыонг. Численный анализ ресурсных характеристик радиальных рабочих колес роторов турбомашин // *System Analysis & Mathematical Modeling*. 2024. Т. 6. № 3. С. 387–395. [https://doi.org/10.17150/2713-1734.2024.6\(3\).387-395](https://doi.org/10.17150/2713-1734.2024.6(3).387-395). EDN: UAWXWN.
17. Repetsky O.V., Nguyen Tien Quyet, Ryzhikov I.N. Investigation of vibration and fatigue life of mistuned bladed disks // *Actual Issues of Mechanical Engineering: Proceedings of the International Conference*. 2017. P. 702–707. <https://doi.org/10.2991/aime-17.2017.114>.
18. Repetski O., Rygikov I., Springer H. Numerical analysis of rotating flexible blade-disk-shaft systems // *ASME International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exhibition*. 1999. Vol. 4. P. V004T03A034. <https://doi.org/10.1115/99-GT-317>.
19. Repetskii O.V. Use of the FEM to solve the thermoelasticity problem of turbine blades // *Strength of Materials*. 1990. Vol. 22. Iss. 12. P. 1848–1854. <https://doi.org/10.1007/BF00769137>.
20. Репецкий О.В., Нгуен Ван Мань. Верификация разработанных математических моделей и созданного программного обеспечения на тестовых моделях пластин и академических рабочих колесах осевых турбомашин // *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование*. 2024. № 2. С. 134–144. [https://doi.org/10.26731/1813-9108.2024.2\(82\).134-144](https://doi.org/10.26731/1813-9108.2024.2(82).134-144).

References

1. Ewins D.J. Vibration modes of mistuned bladed disks. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. 1976;98(3):349-355. <https://doi.org/10.1115/1.3446180>.
2. Ewins D.J., Han Z.S. Resonant vibration levels of a mistuned bladed disk. *Journal of vibration and acoustics*. 1984;106(2):211-217. <https://doi.org/10.1115/1.3269171>.
3. El-Bayoumy L.E., Srinivasan A.V. Influence of mistuning on rotor-blade vibrations. *AIAA Journal*. 1975;13(4):460-464. <https://doi.org/10.2514/3.49731>.

4. Feiner D.M., Griffin J.H. A fundamental model of mistuning for a single family of modes. *Journal of Turbomachinery*. 2002;124(4):597-605. <https://doi.org/10.1115/1.1508384>.
5. Kenyon J.A., Griffin J.H. Forced response of turbine engine bladed disks and sensitivity to harmonic mistuning. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. 2003;125(1):113-120. <https://doi.org/10.1115/1.1498269>.
6. Rivas-Guerra A.J., Mignolet M.P. Maximum amplification of blade response due to mistuning: localization and mode shapes aspects of the worst disks. *Journal of Turbomachinery*. 2003;125(3):442-454. <https://doi.org/10.1115/1.1506958>.
7. Petrov E.P. Analysis of sensitivity and robustness of forced response for nonlinear dynamic structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2009;23(1):68-86. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2008.03.008>.
8. Nikolic M., Petrov E.P., Ewins D.J. Robust strategies for forced response reduction of bladed disks based on large mistuning concept. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. 2008;130(2):022501. <https://doi.org/10.1115/1.2799524>.
9. Manetti M., Giovannetti I., Pieroni N., Horculescu H., Peano G., Zonfrillo G., et al. The dynamic influence of crystal orientation on a second generation single crystal material for turbine buckets. In: *Power for Land, Sea, and Air: Conference Turbo Expo*. 8–12 June 2009, Orlando, Florida. Orlando, Florida: ASME; 2009, vol. 6, p. 125-133. <https://doi.org/10.1115/GT2009-59091>.
10. Roy S.C., Goyal S., Sandhya R., Ray S.K. Analysis of hysteresis loops of 316L(N) stainless steel under low cycle fatigue loading conditions. *Procedia Engineering*. 2013;55:165-170. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.03.237>.
11. Repetskii O.V., Cuong Hoang Dinh. Fatigue life of radial turbomachines at changing thickness blades taking into account intentional mistuning. In: *State and Prospects for the Development of Agribusiness – INTERAGROMASH 2022: 15th International Scientific Conference on Precision Agriculture and Agricultural Machinery Industry*. E3S Web of Conferences. 2022;363(1):01044. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202236301044>.
12. Repetskii O.V., Cuong Hoang Dinh. Physical and mathematical modeling and computer analysis of radial impellers for chemical and power engineering, taking into account ecology. In: *Actual problems of the energy complex: physical processes, mining, production, transmission, processing and environmental protection: 4th International scientific and practical Conference*. IOP Conference Series. 2022;990:012044. <https://doi.org/10.1088/1755-1315/990/1/012044>.
13. Kaneko Ya., Watanabe T., Furukawa T. Study on the reduction of the resonant stress of turbine blades caused by the stage interaction force (Simultaneous optimization of blade resonant stress and amount of unbalance). *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. 2020;143(6):061022. <https://doi.org/10.1115/1.4049471>.
14. Beck J.A., Brown J.M., Kaszynski A.A., Gillaugh D.L. Numerical methods for calculating component modes for geometric mistuning reduced-order models. In: *Turbomachinery Technical Conference and Exposition: ASME Turbo Expo 2021*. 2021;9B:V09BT29A016. <https://doi.org/10.1115/GT2021-59126>.
15. Whitehead D.S. The maximum factor by which forced vibration of blades can increase due to mistuning. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*. 1998;120(1):115-119. <https://doi.org/10.1115/1.2818061>.
16. Hoang Dinh Cuong. Numerical analysis of the resource characteristics radial impellers of turbomachine rotors. *System Analysis & Mathematical Modeling*. 2024;6(3):387-395. (In Russ.). [https://doi.org/10.17150/2713-1734.2024.6\(3\).387-395](https://doi.org/10.17150/2713-1734.2024.6(3).387-395). EDN: UAWXWN.
17. Repetsky O.V., Nguyen Tien Quyet, Ryzhikov I.N. Investigation of vibration and fatigue life of mistuned bladed disks. In: *Actual Issues of Mechanical Engineering: Proceedings of the International Conference*. 2017;702-707. <https://doi.org/10.2991/aime-17.2017.114>.
18. Repetski O., Rygikov I., Springer H. Numerical analysis of rotating flexible blade-disk-shaft systems. *ASME International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exhibition*. 1999;4:V004T03A034. <https://doi.org/10.1115/99-GT-317>.
19. Repetskii O.V. Use of the FEM to solve the thermoelasticity problem of turbine blades. *Strength of Materials*. 1990;22(12):1848-1854. <https://doi.org/10.1007/BF00769137>.
20. Repetskii O.V., Nguyen Van Man. Verification of the developed mathematical models and the created software on test models of plates and bladed disks of axial turbomachines. *Modern Technologies. System Analysis. Modeling*. 2024;2:134-144. [https://doi.org/10.26731/1813-9108.2024.2\(82\).134-144](https://doi.org/10.26731/1813-9108.2024.2(82).134-144).

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ**Репецкий Олег Владимирович,**

д.т.н., профессор,
проректор по международным связям,
Иркутский государственный аграрный
университет имени А.А. Ежевского,
664038, г. Иркутск, Россия
✉ repetckii@igsha.ru
<https://orcid.org/0000-0003-2560-2721>

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR**Oleg V. Repetskii,**

Dr. Sci. (Eng.), Professor,
Vice-Rector for International Relations,
Irkutsk State Agrarian University named
after A.A. Ezhevsky,
Irkutsk 664038, Russia
✉ repetckii@igsha.ru
<https://orcid.org/0000-0003-2560-2721>

Заявленный вклад автора

Автор выполнил аналитическую работу, на основании полученных результатов провел обобщение, подготовил рукопись к печати.

Конфликт интересов

Авторы заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Информация о статье

Статья поступила в редакцию 12.12.2024 г.; одобрена после рецензирования 30.01.2025 г.; принята к публикации 10.03.2025 г.

Author contribution

The author performed a comprehensive analysis, made a generalization on the basis of the results obtained and prepared the copyright for publication.

Conflict of interests

The author declares no conflict of interests.

The final manuscript has been read and approved by the author.

Information about the article

The article was submitted 12.12.2024; approved after reviewing 30.01.2025; accepted for publication 10.03.2025.