

ЭНЕРГЕТИКА

Научная статья
УДК 536.2:519.63

EDN: HYUOIW

DOI: 10.21285/1814-3520-2024-2-290-302



Задача Стефана в тепловыделяющем цилиндрическом образце с граничными условиями третьего рода: расчёт времени расплавления

И.Г. Донской¹✉¹Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, Иркутск, Россия

Резюме. Цель – установить кинетические закономерности расплавления тепловыделяющего цилиндрического элемента в заведомо надкритических условиях с помощью численного моделирования. Объектом исследования является процесс плавления в однородном образце, выделяющем теплоту за счет протекания реакции или электромагнитного нагрева. Теплофизические свойства образца принимаются постоянными в пределах твердой и жидкой фаз. Основным инструментом исследования является численная модель, построенная на основе нестационарной задачи Стефана в тепловыделяющем теле и включающая описание процессов теплопроводности и плавления. Фазовый переход описывается в энтальпийном представлении. Для выбора параметров численной модели (шагов сетки) проводится исследование точности разностной схемы. В результате проведенных исследований получены расчетные зависимости основных характеристик плавления (время расплавления и максимальная температура образца в момент расплавления) от управляющих параметров (интенсивность тепловыделения, величина теплового эффекта плавления, отношение коэффициентов теплопроводности фаз). С помощью некоторых приближений (усреднение температуры, квазистационарное распределение) получены формулы для оценки времени расплавления исследуемого образца. Расчеты показали, что изменение теплофизических свойств образца (коэффициентов теплопроводности, теплового эффекта) оказывает существенное влияние на скорость его плавления. Установлено, что зависимость времени расплавления от интенсивности тепловыделения и теплового эффекта фазового перехода качественно совпадает с приближенными моделями, но существенно отличается от них количественно, особенно в области малых отклонений от критической интенсивности тепловыделения. Проведенные расчеты могут быть использованы при оценке термомеханической устойчивости материалов с внутренним тепловыделением. Разработанная численная модель дает возможность исследовать процессы плавления в широком диапазоне условий, в том числе при изменении граничных условий.

Ключевые слова: фазовые переходы, численное моделирование, хранение тепловой энергии

Благодарности. Работа выполнена в рамках проекта государственного задания (№ FWEU-2021-0005) программы фундаментальных исследований РФ на 2021–2030 гг. с использованием ресурсов ЦКП «Высокотемпературный контур» (Минобрнауки России, проект № 13.ЦКП.21.0038).

Для цитирования: Донской И.Г. Задача Стефана в тепловыделяющем цилиндрическом образце с граничными условиями третьего рода: расчёт времени расплавления // iPolytech Journal. 2024. Т. 28. № 2. С. 290–302. <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2024-2-290-302>. EDN: HYUOIW.

POWER ENGINEERING

Original article

Stefan problem for a heat-generating cylindrical sample with boundary conditions of the third kind: calculation of melting time

Igor G. Donskoy¹✉¹Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, Irkutsk, Russia

Abstract. We determine the kinetic patterns of melting in a heat-generating cylindrical element under invariable supercritical conditions using numerical modelling. The study focuses on the melting process in a homogeneous sample that generates heat either through a chemical reaction or electromagnetic heating. The thermophysical properties of the sample were assumed to be constant in both solid and liquid phases. The main tool used in the study was a numerical model based on the nonstationary Stefan problem in a heat-generating body, which incorporates

the descriptions of heat conduction and melting processes. The phase transition was described in terms of enthalpy. In order to select the parameters of the numerical model (grid steps), the accuracy of the difference scheme was investigated. The study presents calculated dependencies of the main melting characteristics (melting time and the maximum sample temperature at melting) on control parameters (heat generation intensity, the heat effect of melting and the ratio of thermal conductivity coefficients of the phases). By using specified approximations (temperature averaging and quasi-stationary distribution), formulas were derived to estimate the melting time of the sample. The calculations showed that the variations in the thermal properties of the sample (thermal conductivity coefficients and heat effect) significantly influence the melting rate. It was demonstrated that although the relationship between the melting time and the intensity of heat generation and the thermal effect of the phase transition is consistent with the approximate models, there is a significant quantitative difference between them, in particular, for small deviations from the critical heat generation intensity. The calculations can be used to assess the thermomechanical stability of materials with internal heat generation. The developed numerical model allows melting processes to be investigated under a wide range of conditions, including varying boundary conditions.

Keywords: phase transitions, numerical modeling, thermal energy storage

Acknowledgements. The research was carried out under the State Assignment Project (no. FWEU-2021-0005) of the Fundamental Research Program of the Russian Federation for the period from 2021 to 2030 using the resources of the High-Temperature Circuit Multi-Access Research Center (Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, project no 13. ЦКП.21.0038).

For citation: Donskoy I.G. Stefan problem for a heat-generating cylindrical sample with boundary conditions of the third kind: calculation of melting time. *iPolytech Journal*. 2024;28(2):290-302. (In Russ.). <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2024-2-290-302>. EDN: HYUOIW.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи теплопроводности, связанные с критическими явлениями, часто встречаются в теплоэнергетике и химической технологии. Наиболее известными уравнениями такого рода являются уравнения теплового взрыва [1]. Похожие задачи возникают в гидромеханике многофазных сред [2–4]. В теплоэнергетике можно отнести сюда задачи Стефана с внутренним тепловыделением [5]. Изменение фазового состояния при объемном тепловыделении происходит в элементах теплоэнергетических установок, при термической обработке материалов и в химических реакторах [6–10]. Конкретные условия теплообмена существенно зависят от исследуемого процесса, однако качественные закономерности, которые удается получить на простых моделях, могут быть применены при анализе более сложных конфигураций. Наиболее простую формулировку можно получить, если рассматривать пространственно-одномерные задачи, среди которых традиционно выделяются задачи с плоской, цилиндрической и сферической симметрией.

В зависимости от того, является ли плавление целевым или неблагоприятным процессом, необходимо выбирать условия нагрева таким образом, чтобы обеспечить наиболее быстрый прогрев образца, или наоборот, чтобы избежать достижения критических условий. Например, при запасании тепловой энергии в материалах с фазовыми превращениями необходимо поддерживать подходящую скорость теплоотдачи, при этом после

исчерпания емкости теплового аккумулятора дальнейший нагрев становится нецелесообразным. При исследовании аварийных режимов работы тепловыделяющих элементов важно оценивать время, в течение которого образец может поддерживать механическую устойчивость за счет внешней твердой оболочки. В обоих случаях нужно знать скорость движения фронта фазового перехода внутри образца и ожидаемое время его проплавления, то есть время достижения этим фронтом границы области. Представленная задача пока не решена в общем виде, поэтому для ее решения обычно используются численные методы.

В настоящей работе рассматривается одномерная цилиндрическая задача Стефана с внутренним тепловыделением, в которой возможно проплавление внешней поверхности (скорость теплообмена на внешней поверхности конечна). С помощью численной модели исследуется продвижение фронта плавления с учетом тепловыделения и изменения теплофизических свойств фаз. Целью работы является получение зависимости времени расплавления от условий и сравнение приближенных решений с численными.

СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим стационарную задачу теплопроводности в образце с однородным тепловыделением в безразмерных переменных:

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\theta}{d\xi} \right) + Q = 0. \quad (1)$$

Граничные условия для этой задачи следующие:

$$\frac{d\theta}{d\xi}(0) = 0; \quad \frac{d\theta}{d\xi}(1) = -Bi\theta(1). \quad (2)$$

При достижении температуры $\theta_m = 1$ происходит фазовый переход, при этом появляется фазовая граница ξ_m . Тогда вместо уравнения (1) будем рассматривать два уравнения для двух фаз:

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\theta_s}{d\xi} \right) + Q = 0, \quad \xi > \xi_m; \quad (3)$$

$$\frac{\kappa}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{d\theta_l}{d\xi} \right) + Q = 0, \quad \xi < \xi_m. \quad (4)$$

Отметим, что уравнение (4), по сути, должно включать слагаемые, учитывающие свободноконвективный перенос [11]. В настоящей работе мы пренебрегаем конвективными эффектами (в некоторых случаях можно считать, что эти эффекты сводятся к изменению эффективного коэффициента теплопроводности).

Коэффициент κ учитывает различие в коэффициентах теплопроводности фаз. Условие на фазовой границе для стационарного состояния записывается в следующем виде:

$$\theta_s(\xi_m) = \theta_l(\xi_m) = 1, \quad \frac{d\theta_s}{d\xi}(\xi_m) = \kappa \frac{d\theta_l}{d\xi}(\xi_m). \quad (5)$$

В работах [5, 11, 12] получено аналитическое решение для координаты ξ_m в приближении $Bi = \infty$. Общее решение (1) можно записать в виде [12]:

$$\theta = -\frac{Q}{4}\xi^2 + C_1 \ln \xi + C_2. \quad (6)$$

Граничные условия (2) позволяют определить постоянные интегрирования:

$$\theta_l = 1 + \frac{Q}{4\kappa}(\xi_m^2 - \xi^2); \quad (7)$$

$$\theta_s = \frac{Q}{4}(1 - \xi^2) + \left[\frac{1 - \frac{Q}{4}(1 - \xi^2) - \frac{Q}{2Bi}}{\ln \xi_m - \frac{1}{Bi}} \right] \ln \xi - \frac{1}{Bi} \left[\frac{1 - \frac{Q}{4}(1 - \xi_m^2) - \frac{Q}{2Bi}}{\ln \xi_m - \frac{1}{Bi}} - \frac{Q}{2} \right]. \quad (8)$$

Граничные условия (5) дают уравнение для определения положения границы ξ_m в следующем виде:

$$\frac{1 - \frac{Q}{4}(1 - \xi_m^2) - \frac{Q}{2Bi}}{\ln \xi_m - \frac{1}{Bi}} = 0. \quad (9)$$

Если в уравнении (9) положить $Bi = \infty$, то физический корень будет равен:

$$\xi_m = \sqrt{1 - \frac{4}{Q}}. \quad (10)$$

Это известный результат [5]. В общем случае уравнение (9) дает поправку на коэффициент теплоотдачи в виде [13]:

$$\xi_m = \sqrt{1 - \frac{4}{Q} + \frac{2}{Bi}}. \quad (11)$$

Это уравнение дает не только условие начала плавления ($\xi_m = 0$):

$$Q_{\min} = \frac{4}{1 + \frac{2}{Bi}}, \quad (12)$$

но и условие расплавления внешней границы ($\xi_m = 1$):

$$Q_{\max} = 2Bi. \quad (13)$$

Для плоской и сферической симметрии формулы (12) и (13) можно обобщить:

$$Q_{\min} = \frac{2n}{1 + \frac{2}{Bi}}; \quad (14)$$

$$Q_{\max} = nBi, \quad (15)$$

где n – число, соответствующее симметрии образца (1 для плоского слоя, 2 для цилиндра, 3 для шара). При граничных условиях первого рода на внешней границе (т.е. формально при $Bi \rightarrow \infty$) уравнения (14) и (15) переходят в известные формулы.

Отметим, что для стационарной задачи число Стефана St , т.е. безразмерный тепловой эффект фазового перехода, не влияет на решение, что естественно, поскольку для неподвижного фронта фазового перехода достаточно условий (5). Обычно число Стефана определяется теплофизическими свойствами материнской фазы, в этом случае в настоящей работе применяется следующее определение [5]:

$$St = \frac{c\Delta T_m}{\Delta h_m}. \quad (16)$$

Здесь c – соответственно, удельная теплоемкость, Дж/(кг·К); Δh_m – удельный тепловой эффект плавления, Дж/кг; ΔT_m – разность между температурой плавления и температурой окружающей среды, К.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА: УСРЕДНЕННАЯ МОДЕЛЬ

Помимо условий расплавления нас интересует время, за которое расплавление произойдет после начала нагрева. При этом можно рассмотреть два предельных случая, для которых уравнение теплопроводности сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. В первом случае пренебрегаем теплотериями и рассматриваем прогрев адиабатического образца:

$$\frac{d\theta}{dt} = Q. \quad (17)$$

Этот случай предельно прост, хотя необходимо учесть, что после достижения температуры плавления выделяющаяся теплота расходуется только на фазовый переход. Полное расплавление достигается за время:

$$\tau_m = \frac{1 + \frac{1}{St}}{Q}. \quad (18)$$

Другой предельный случай – это случай высокой теплопроводности, который дает уравнение для средней температуры образца в следующем виде:

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = -nBi\bar{\theta} + Q. \quad (19)$$

После достижения температуры плавления нужно учесть затраты теплоты на фазовый переход, и тогда получаем формулу:

$$\tau_m = \frac{1}{nBi} \ln \left(\frac{Q}{Q - nBi} \right) + \frac{1}{St(Q - nBi)}. \quad (20)$$

Первое слагаемое – это время прогрева до температуры плавления, второе слагаемое – время полного расплавления образца. Условие неотрицательности выражения под логарифмом в (20) совпадает с условием (15). При $Q \gg nBi$ выражение (20) переходит в (18).

При $Q \sim nBi$ второе слагаемое в (20) резко возрастает (принятые упрощения оказываются слишком грубыми). Для регуляризации можно частично учесть неоднородность температуры в образце, если ввести в формулу (20) эффективную температуру границы. Такой прием кажется противоречащим самой постановке задачи, поскольку температура границы по условию должна стать равной температуре плавления. Однако эффективная температура границы в данном случае осредняется по времени, а не по сечению, как это делалось при выводе уравнения (19). Формула (20) модифицируется следующим образом:

$$\tau_m = \frac{1}{nBi} \ln \left(\frac{Q}{Q - nBi} \right) + \frac{1}{St(Q - nBi\theta_{eff})}. \quad (21)$$

Эффективная температура границы θ_{eff} может быть чувствительной к значениям Q и Bi . По сути, это подгоночный параметр для упрощенной модели расплавления образца.

В работе [14] на основании численных результатов предложена формула для времени установления стационарного состояния: $\tau_m St = \text{const}$ (для небольших значений St): как видно из формул (18) и (20), такая зависимость действительно наблюдается, если $St \ll 1$.

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА: ОДНОМЕРНОЕ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Можно найти решение задачи теплопроводности в твердой фазе до начала плавления и таким образом определить время прогрева до начала плавления.

Нестационарное уравнение теплопроводности с постоянным объемным тепловыделением выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + Q. \quad (22)$$

Выберем граничные условия:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi}(t, 0) = 0; \quad -\frac{\partial \theta}{\partial \xi}(t, 1) = Bi\theta(t, 1). \quad (23)$$

Теперь перейдем от температуры θ к новой переменной φ , определенной следующим образом:

$$\varphi = \frac{\theta}{Q} + \frac{\xi^2}{4}. \quad (24)$$

Можно видеть, что такое преобразование приводит уравнение (17) к однородному виду:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right). \quad (25)$$

Граничные условия при этом тоже несколько изменяются:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(t, 0) &= 0; \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(t, 1) &= -\frac{1}{2} + Bi \left[\varphi(t, 1) - \frac{1}{4} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Начальное условие для (25) при начальном распределении температуры $\theta(0, \xi) = 0$ преобразуется в $\varphi(0, \xi) = 1/4 \xi^2$. Решение уравнения (25) можно представить в виде функциональных рядов, однако нас интересует только максимальная температура, которая достигается в центре образца. В стационарном состоянии распределение φ равномерно:

$$\varphi(t \rightarrow \infty, \xi) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2Bi}. \quad (27)$$

При $\varphi = Q^{-1}$ это выражение ожидаемо совпадает с условием (12). Если на стадии прогрева устанавливается регулярный режим, то температура плавления в центре образца достигается за время:

$$\tau_1 = \frac{1}{\mu_1^2} \ln \left(\frac{4}{1 - \frac{4}{Q} + \frac{2}{Bi}} \right). \quad (28)$$

Здесь μ_1 – это первый корень характеристического уравнения $\mu = Bi J_0(\mu) / J_1(\mu)$ [15].

Распространение фронта по радиусу образца можно в квазистационарном приближении описать следующим уравнением:

$$\frac{1}{St} \frac{d\xi_m^2}{dt} = \frac{4 + Q \left(\xi_m^2 - 1 - \frac{2}{Bi} \right)}{\ln \xi_m^2 - \frac{2}{Bi}}. \quad (29)$$

Уравнение (29) является обобщением результата работы [5] для конечных чисел Bi (см. также [14]). Тогда для сверхкритических условий можно записать, что время расплавления равно:

$$\begin{aligned} \tau_m &= \frac{1}{\mu_1^2} \ln \left(\frac{4}{1 - \frac{4}{Q} + \frac{2}{Bi}} \right) + \\ &+ \frac{1}{St} \int_0^1 \frac{\ln \eta - \frac{2}{Bi}}{4 + Q \left(\eta - 1 - \frac{2}{Bi} \right)} d\eta \end{aligned} \quad (30)$$

Полное время расплавления складывается из времени прогрева до температуры начала плавления и квазистационарного движения фронта от центра до внешней границы образца. Для малых St , когда условие квазистационарности выполняется достаточно хорошо, совпадение оказывается достаточно хорошим. Нас, однако, интересует более общая постановка.

Для проверки зависимостей, полученных в разделах 2 и 3, нужны численные расчеты. Численные методы решения задачи Стефана, как известно, часто требуют специальных приближений (по сравнению с методами решения задач с неподвижными фазами). В следующем разделе подробно обсуждается численный метод и даются оценки точности численного решения.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Рассмотрим нестационарную задачу теплопроводности с внутренним тепловыделением. Для цилиндрической симметрии уравнение для температуры записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \begin{cases} \frac{\kappa}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + Q, & \xi < \xi_m \\ \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + Q, & \xi > \xi_m \end{cases}. \quad (31)$$

Граничные и начальные условия следующие:

$$\theta(0, \xi) = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(t, 0) = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(t, 1) = -Bi\theta, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} -\kappa \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(t, \xi_m^-) &= -\frac{\partial \theta}{\partial \xi}(t, \xi_m^+) + \frac{1}{St} \frac{d\xi_m}{dt}; \\ \theta(t, \xi_m) &= 1. \end{aligned} \quad (33)$$

Нас интересует метод решения, позволяющий свободно варьировать параметры

задачи, в том числе добавлять новые слагаемые (например, связанные с дополнительными механизмами переноса). Поэтому в настоящей работе задача (31)–(33) решается численно, с использованием сеточной аппроксимации:

$$\frac{\theta_i - \theta_i^0}{\tau} = \frac{1 + (\kappa - 1)\delta}{h^2} \xi_i \left[\frac{\xi_{i-1}}{\xi_i} \theta_{i-1} + \theta_{i+1} - \left(1 + \frac{\xi_{i-1}}{\xi_i} \right) \theta_i \right] + Q. \quad (34)$$

Здесь индекс 0 соответствует предыдущему временному слою; индикатор δ равен 0 для нерасплавившейся области и равен 1 для расплавившейся области.

Граничные условия для сеточной функции записываются в следующем виде:

$$\theta_1 - \theta_2 = 0; (1 + hBi)\theta_N - \theta_{N-1} = 0. \quad (35)$$

Вместо граничного условия (33) удобнее использовать вариант энтальпийной схемы [16, 17]. Для этого вводим новую переменную X , которая характеризует долю нерасплавленного компонента. В начальный момент времени $X(0, \xi) = 1$. Затем плавление протекает согласно уравнению:

$$\frac{\partial X^2}{\partial t} = \begin{cases} 0, \theta < 1 \\ -2StX \left[\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + Q \right], \theta \geq 1 \end{cases}. \quad (36)$$

Здесь множитель $2X$ в нижнем выражении правой части учитывает исчерпание нерасплавленного вещества: после достижения $X = 0$ плавление прекращается. Соответственно, индикатор δ в уравнении (34) становится непрерывной величиной, причем $\delta = 1 - X$.

Преимущество энтальпийной схемы в данном случае состоит в том, что при высоких значениях Q фронт плавления в основном распространяется не за счет теплопроводности, а за счет локального нагрева. Поэтому использование разностных схем для определения положения фронта плавления из (33) может оказаться некорректным.

При численном решении вместо уравнения (36) рассматривается простой тепловой баланс каждого расчетного элемента: если в i -м элементе $\theta_i > 1$ и $X_i > 0$, то плавление протекает либо до тех пор, пока θ_i не снижается до 1, либо до тех пор, пока X_i не

становится равным нулю. Такая проверка, однако, требует нахождения промежуточного распределения температуры. Поэтому решение проводится с помощью расщепления по физическим процессам. На первом этапе решается задача теплопроводности с фиксированным фазовым состоянием образца. Полученное распределение температуры θ^* позволяет проверить состояние образца в соответствии с формулами:

$$X_i = \begin{cases} X_i^0, \theta_i^* \leq 1 \\ X_i^0 - \min \{ St(\theta_i^* - 1), X_i^0 \}, \theta_i^* > 1 \end{cases}. \quad (37)$$

После обновления фазового состояния образца необходимо обновить температурное поле:

$$\theta_i = \theta_i^* - \frac{X_i - X_i^0}{St}. \quad (38)$$

Другим вариантом может быть разбиение задачи теплопроводности на два шага: первый шаг позволяет получить промежуточное распределение температуры θ^* , для которого определяется скорость плавления вещества в расчетных элементах; на втором шаге полученная скорость плавления явно учитывается в задаче теплопроводности как сток теплоты. Отметим, что расщепление делает алгоритм устойчивее в случаях, когда возможно не только плавление, но и кристаллизация вещества: при малых числах St уравнение (38) может приводить к перегреву на границе фазового перехода, который сглаживается при использовании двухшаговой схемы.

Для энтальпийной схемы положение фронта плавления приходится определять как линию заданной степени конверсии (например, $X = 0,5$). На рис. 1 показана зависимость численного решения от параметров сетки. Из графиков (в) и (г) видно, что схема имеет первый порядок точности по h и τ .

Решение задачи сводится, таким образом, к решению системы разностных уравнений (34), (35) для температуры и (37) и (38) для доли расплавленного компонента. Условием расплавления образца при использовании уравнения (33) было бы достижение фронтом фазового перехода границы образца; в нашем случае это расплавление граничного расчетного элемента, т.е. $X_N = 0$.

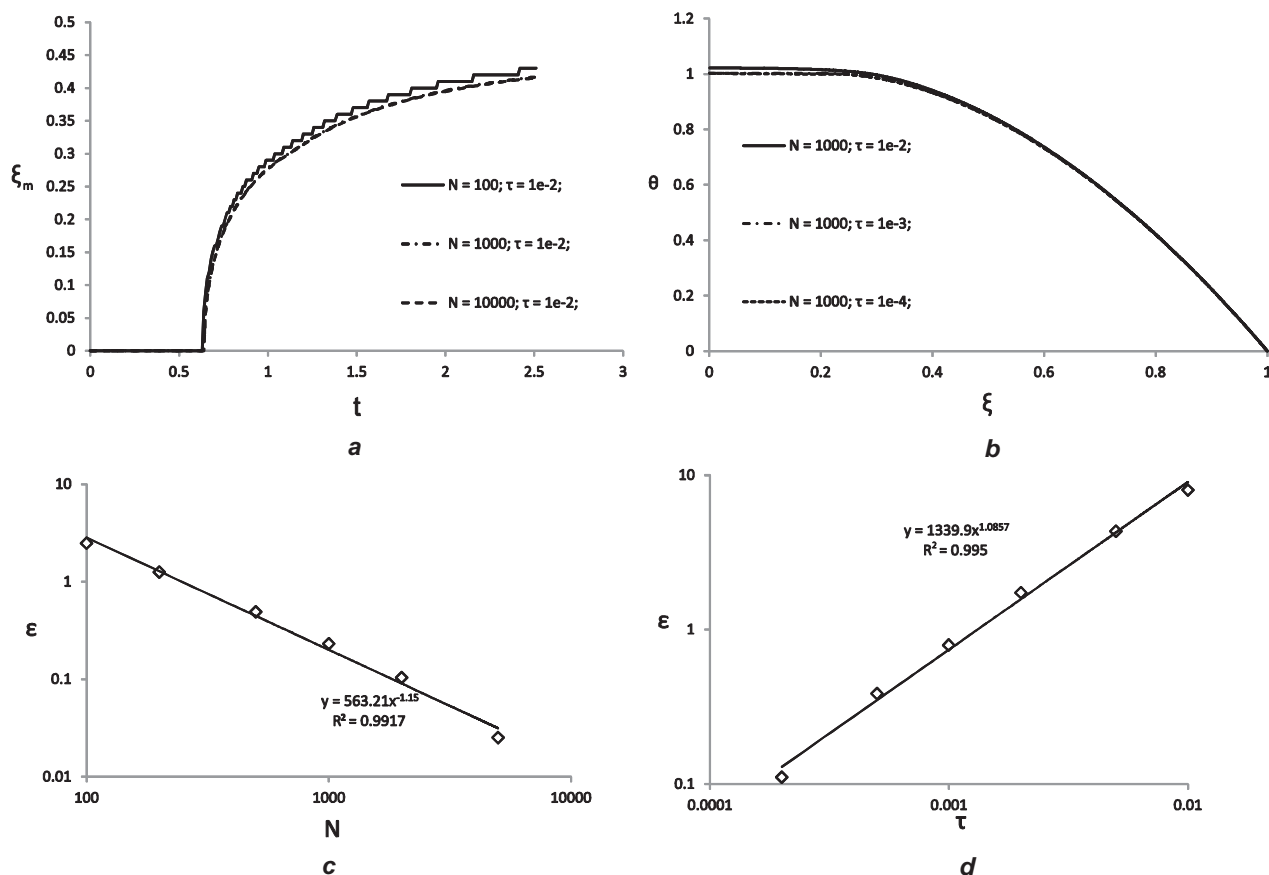


Рис. 1. Зависимость численного решения от параметров сетки: а – положение фронта плавления для разных пространственных сеток; б – распределение температуры для разных временных сеток; в – зависимость погрешности численного решения от числа узлов пространственной сетки; д – зависимость погрешности решения от шага временной сетки

Fig. 1. Numerical solution vs grid settings: а – melting front position for different spatial grids; б – temperature distribution for different time grids; в – dependence of the numerical solution error on the spatial grid node number; д – dependence of the solution error on the time grid step

Для того чтобы показать сходимость разностной схемы, были проведены расчеты для разных шагов пространственной и временной сетки. Целевой характеристикой является время расплавления образца. Кроме того, индикатором надкритических режимов является максимальная температура в образце на момент расплавления оболочки.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Далее приводятся результаты расчетов для разных значений параметров St , Bi , k и Q , причем таким образом, чтобы тепловыделение Q заведомо превышало критическое значение, определяемое условием (15). Величина этого превышения определяет, при прочих равных, скорость движения фронта и время полного расплавления образца. Поэтому в дальнейшем удобно перейти к переменной $\Delta Q = Q - Q_{max}$. Естественно ожидать, что при

$\Delta Q \rightarrow 0$ время расплавления T_m стремится к бесконечности.

Расчетные зависимости времени расплавления от ΔQ и St при $k = 1$ представлены на рис. 2. Ожидается, что с ростом тепловыделения время расплавления уменьшается. В пределе больших Q время расплавления стремится к значению (18). При малых ΔQ зависимость времени расплавления довольно близко описывается логарифмическим законом:

$$T_m \sim -\ln \Delta Q. \quad (39)$$

Такая зависимость хорошо аппроксимирует начальный участок кривых ($\Delta Q < 2$), давая правильное поведение в пределе $\Delta Q \rightarrow 0$ (это поведение соответствует первому слагаемому в (20)). При этом наклон линейных участков в таких координатах обратно пропорционален числу St . При малых St виден переход от логарифмической зависимости (20) к обратной пропорциональности (18).

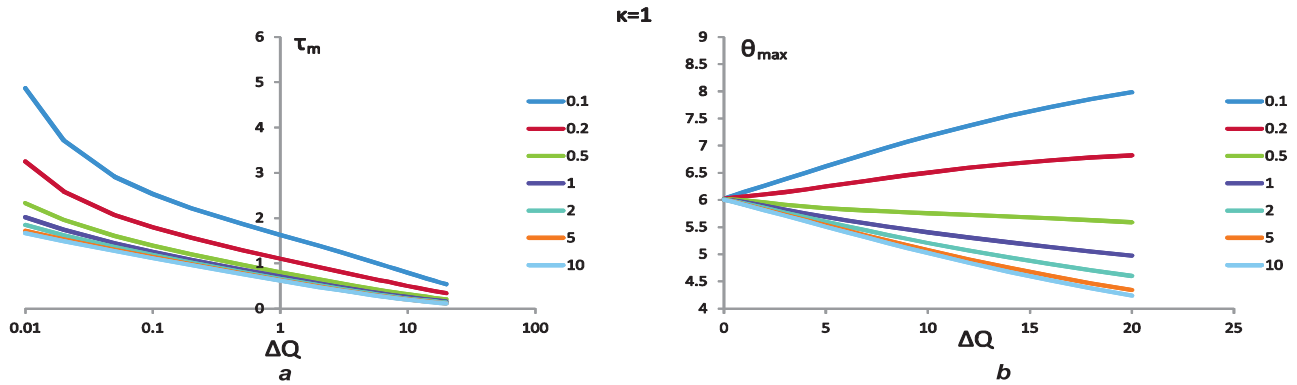


Рис. 2. Зависимость времени расплавления (а) и максимальной температуры от интенсивности тепловыделения (b) при $\kappa = 1$ ($Bi = 10$, $Q_{\max} = 20$, $\Delta Q = Q - Q_{\max}$, числа на легенде – St)

Fig. 2. Melting time (a) and maximum temperature vs heat release intensity (b) at $\kappa = 1$ ($Bi = 10$, $Q_{\max} = 20$, $\Delta Q = Q - Q_{\max}$, St are the numbers in the legend)

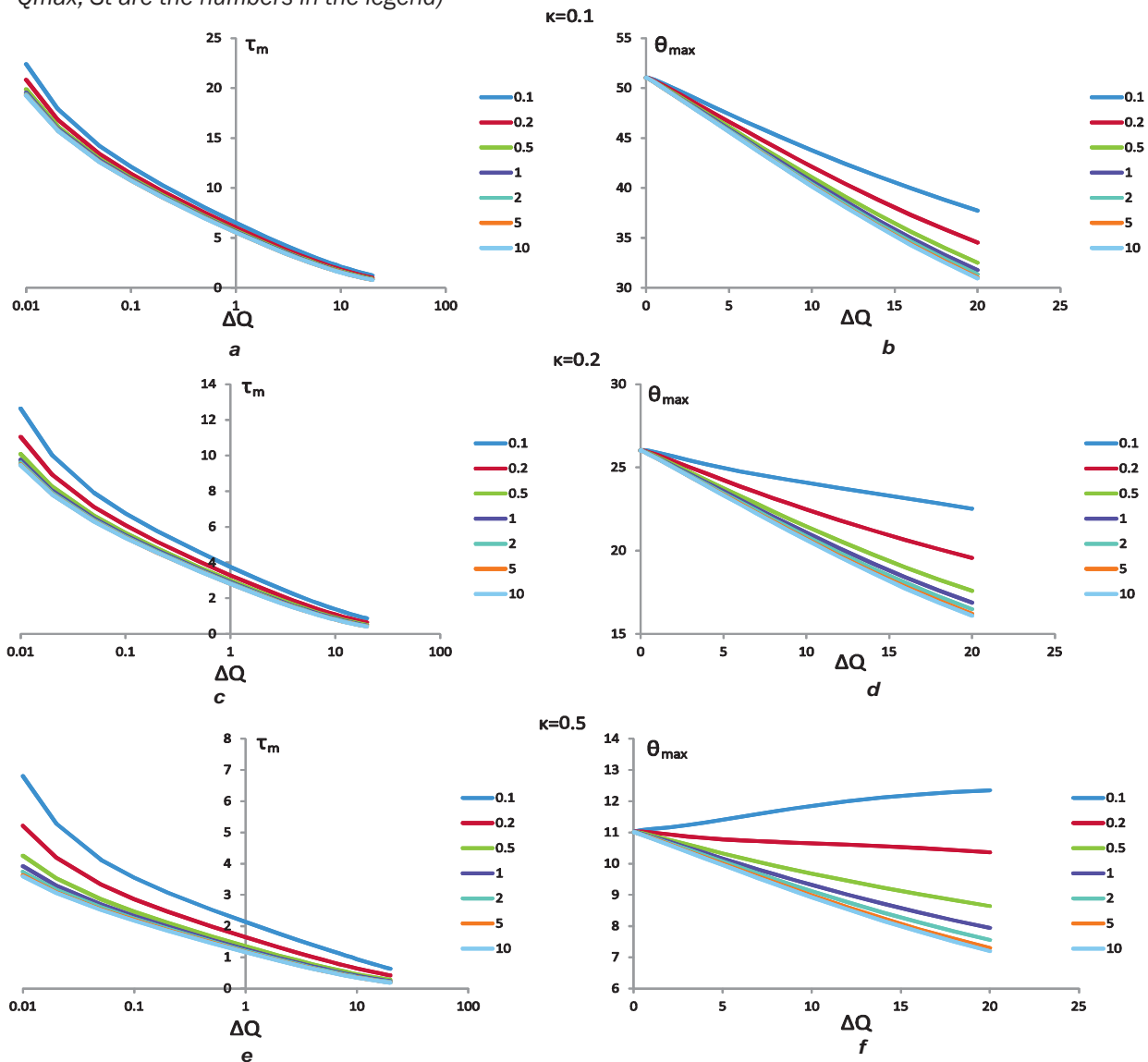


Рис. 3. Зависимость времени расплавления и максимальной температуры от интенсивности тепловыделения при $\kappa < 1$ ($Bi = 10$, $Q_{\max} = 20$, $\Delta Q = Q - Q_{\max}$, числа на легенде – St): а – время расплавления при $\kappa = 0,1$; б – максимальная температура при $\kappa = 0,1$; с – время расплавления при $\kappa = 0,2$; д – максимальная температура при $\kappa = 0,2$; е – время расплавления при $\kappa = 0,5$; ф – максимальная температура при $\kappa = 0,5$

Fig. 3. Melting time and maximum temperature vs heat release intensity at $\kappa < 1$ ($Bi = 10$, $Q_{\max} = 20$, $\Delta Q = Q - Q_{\max}$, St are the numbers in the legend): a – melting time at $\kappa = 0.1$; b – maximum temperature at $\kappa = 0.1$; c – melting time at $\kappa = 0.2$; d – maximum temperature at $\kappa = 0.2$; e – melting time at $\kappa = 0.5$; f – maximum temperature at $\kappa = 0.5$

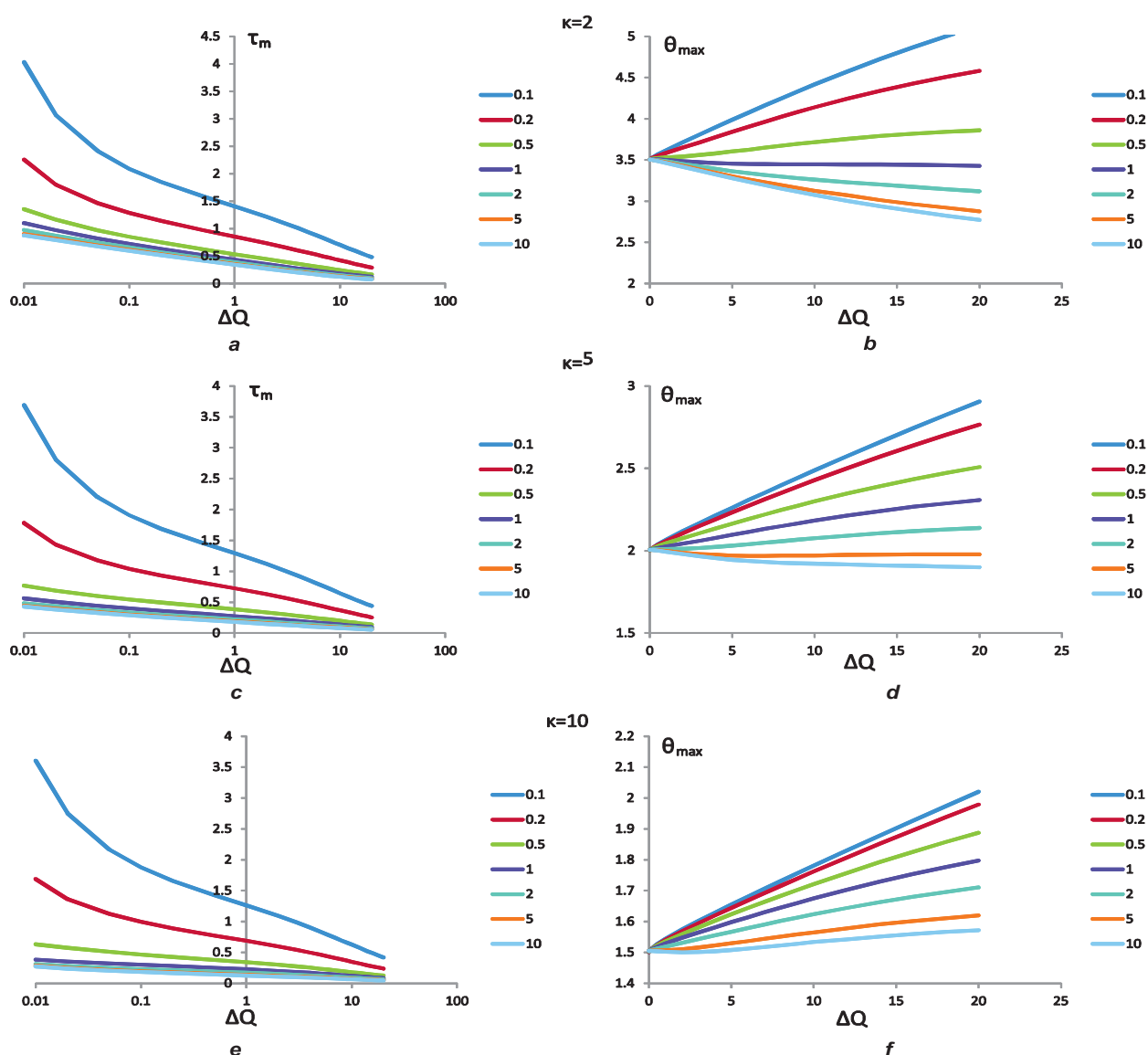


Рис. 4. Зависимость времени расплавления и максимальной температуры от интенсивности тепловыделения при $\kappa > 1$ ($Bi = 10$, $Q_{max} = 20$, $\Delta Q = Q - Q_{max}$, числа на легенде – St): а – время расплавления при $\kappa = 2$; б – максимальная температура при $\kappa = 2$; с – время расплавления при $\kappa = 5$; д – максимальная температура при $\kappa = 5$; е – время расплавления при $\kappa = 10$; ф – максимальная температура при $\kappa = 10$

Fig. 4. Melting time and maximum temperature vs heat release intensity at $\kappa > 1$ ($Bi = 10$, $Q_{max} = 20$, $\Delta Q = Q - Q_{max}$, St are the numbers in the legend): а – melting time at $\kappa = 2$; б – maximum temperature at $\kappa = 2$; с – melting time at $\kappa = 5$; д – maximum temperature at $\kappa = 5$; е – melting time at $\kappa = 10$; ф – maximum temperature at $\kappa = 10$

Интересно, что параметр существенно влияет на скорость расплавления образца. При малых κ время расплавления слабо зависит от числа St , поскольку критическое значение Q_{max} довольно велико (см. рис. 3). При этом температура в центре образца в момент расплавления уменьшается с ростом Q : чем интенсивнее тепловыделение, тем за меньшее время происходит расплавление, а значит, центральная часть успевает прогреться до меньшей температуры. С ростом κ происходит существенное расслоение кривых, особенно в области

малых ΔQ , где можно наблюдать регулярный режим нагрева (см. рис. 4). При $\kappa = 0,5$ наблюдается обращение зависимости максимальной температуры от интенсивности нагрева: для малых St (больших величин теплоты фазового перехода) появляется выраженный фронт плавления, при этом за счет его медленного движения центральная часть образца успевает прогреться до более высокой температуры. Этот эффект наблюдается все более ярко с дальнейшим ростом κ . Повышение теплопроводности жидкой фазы способствует повышению те-

плового потока на фронте фазового перехода и увеличению его скорости. Лучший теплоперенос позволяет достичь меньшей температуры в центре образца в момент расплавления оболочки.

Можно рассматривать расплавление как результат конкуренции двух механизмов нагрева зоны плавления: за счет объемного тепловыделения и за счет теплопроводности. При больших значениях Q и St реализуется первый механизм: в этом случае время расплавления определяется скоростью прогрева и мало зависит от St . При малых Q и St скорость плавления уменьшается, тепловой поток на фронте плавления существенно зависит от соотношения теплопроводностей фаз.

Влияние числа St для всех случаев качественно повторяется для всех вариантов расчета: с ростом St время расплавления уменьшается, а температура образца растет. При этом наблюдается зависимость, которую можно ожидать из упрощенных формул (18) и (20):

$$\tau_m \sim \frac{1}{St}. \quad (40)$$

СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ПРИБЛИЖЕННЫХ ФОРМУЛ

Полученные ранее приближенные формулы не содержат отношения теплопроводностей фаз, что определенно говорит о неприменимости выбранных приближений. Тем не менее для некоторой области значений $kappa$ приближение может быть достаточно хорошим.

При плавлении коэффициент теплопроводности, как правило, уменьшается, но возникающая конвекция может увеличивать тепловой поток [14, 18].

Как видно из рис. 5, простейшая формула (17) дает скорее нижнюю границу для времени расплавления. Приближение (19) сходится к приближению (17) в пределе больших ΔQ , при этом дает слишком высокие значения для малых ΔQ по сравнению с расчетной зависимостью. Приближение (30) довольно плохо описывает расчетную кривую как при малых, так и при больших ΔQ . В узком диапазоне ΔQ порядка нескольких единиц приближения (17) и (30) дают близкие результаты, но этот факт оказывается больше совпадением.

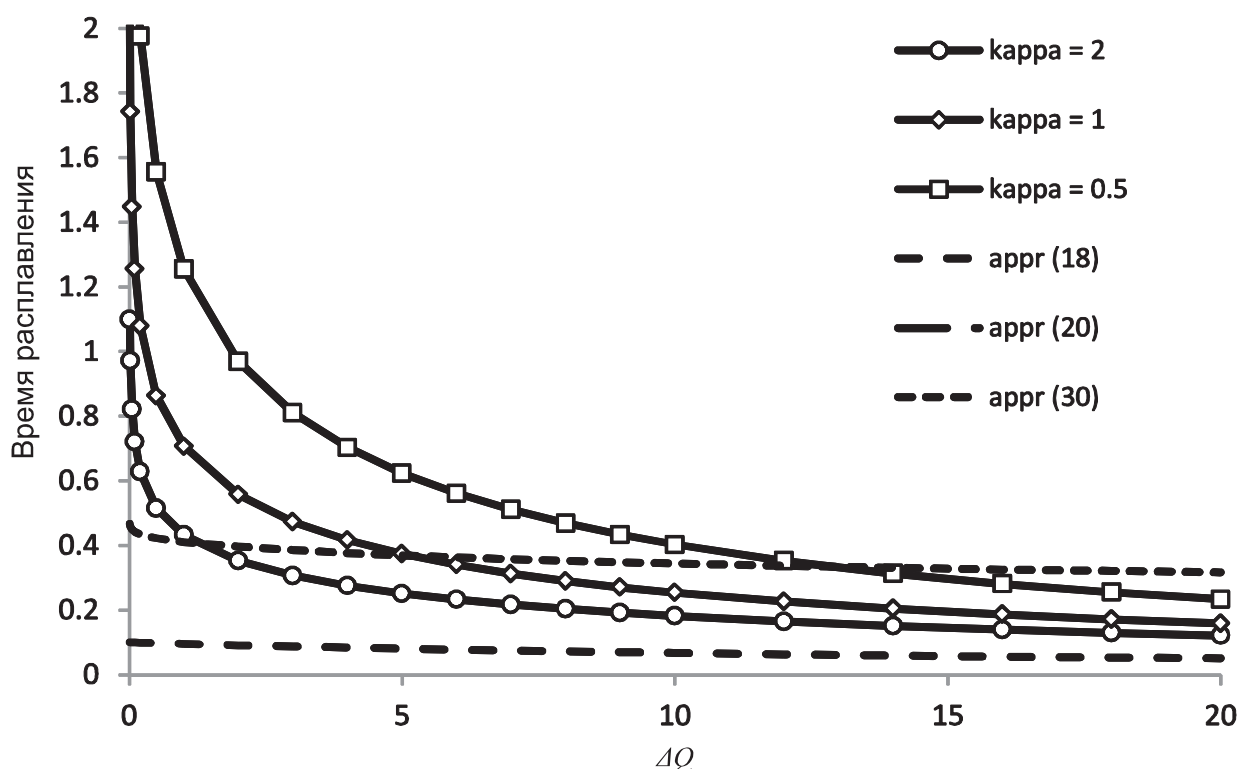


Рис. 5. Сравнение результатов численного моделирования с приближениями: зависимость времени расплавления от интенсивности тепловыделения ($Bi = 10$, $St = 1$)

Fig. 5. Comparison of numerical simulation results with approximations: melting time vs heat release intensity ($Bi = 10$, $St = 1$)

Отметим, что рассмотренная задача является модельной: в ней рассматривается нагрев образца из холодного состояния, в то время как более интересными с практической точки зрения могут быть переходные режимы при изменении тепловой нагрузки [14]. Теплофизические свойства материалов зависят от температуры, поэтому приведенный анализ относится только к условиям небольшого изменения абсолютной температуры, когда применимо приближение средних значений. В работе не рассматриваются лучистые потери теплоты, которые, впрочем, довольно просто учесть в рамках численной модели. В химических приложениях интересны постановки задачи с реагированием расплава, образованием новых фаз и движением расплава. Далее, в приложениях образец, как правило, имеет оболочку с отличающимися от содержимого теплофизическими свойствами, при этом само содержимое может быть многослойным. В некоторых случаях оболочка может быть проницаема для теплоносителя либо содержит другие элементы для активного охлаждения. Наконец, тепловыделение может быть функцией температуры [19, 20]. Все эти особенности требуют модификации модели, введения новых параметров и проведения отдельных расчетов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследуется вопрос о скорости расплавления цилиндрического образца с однородным объемным тепловыделением. Расплавление возможно только при ограниченной скорости теплообмена между поверхностью образца и окружающей средой. Рассматриваются упрощенные (усредненные) постановки задачи, которые позволяют получить выражения для времени расплавления. Численное решение задачи Стефана с одним из вариантов энтальпийной схемы позволяет получить зависимость времени расплавления от параметров задачи. Расчеты показывают, что отношение теплопроводностей фаз существенным образом влияет на скорость плавления, при этом приближенные постановки задач упускают это влияние (хотя влияние других параметров качественно подтверждается). При плавлении за счет объемного тепловыделения происходит конкуренция между прогревом материала за счет теплопроводности и за счет тепловыделения, что приводит к появлению характерных особенностей, в том числе к сложной зависимости времени расплавления от интенсивности тепловыделения.

Список источников

1. Франк-Каменецкий Д.А. Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. Долгopудный: Интеллект, 2008. 407 с. EDN: QKBWWN.
2. Bostandzhiyan S.A., Stolin A.M. The critical conditions of the thermal regime in a generalized couette flow // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 1969. Vol. 17. Iss. 1. P. 848–854. <https://doi.org/10.1007/BF00828393>. EDN: PPUFZJ.
3. Donskoy I. Influence of heating conditions on formation and development of agglomerates in a reactive porous medium // Heat Transfer Research. 2022. Vol. 53. Iss. 12. P. 25–36. <https://doi.org/10.1615/HeatTransRes.2022038756>.
4. Antonov D.V., Fedorenko R.M., Yanovskiy L.S., Strizhak P.A. Physical and mathematical models of micro-explosions: achievements and directions of improvement // Energies. 2023. Vol. 16. Iss. 16. P. 6034. <https://doi.org/10.3390/en16166034>.
5. Crepeau J., Siahpush A. Approximate solutions to the Stefan problem with internal heat generation // Heat and Mass Transfer. 2008. Vol. 44. P. 787–794. <https://doi.org/10.1007/s00231-007-0298-8>.
6. Fetsov S.S., Lutsenko N.A. A novel computational model and OpenFOAM solver for simulating thermal energy storages based on granular phase change materials: advantages and applicability // Journal of Energy Storage. 2023. Vol. 65. P. 107294. <https://doi.org/10.1016/j.est.2023.107294>.
7. Rocha T.T.M., Trevizoli P.V., De Oliveira R.N. A timeline of the phase-change problem for latent thermal energy storage systems: a review of theoretical approaches from the 1970's to 2022 // Solar Energy. 2023. Vol. 250. P. 248–284. <https://doi.org/10.1016/j.solener.2022.12.035>.
8. Tang Jiannan, Huang Mei, Zhao Yuanyuan, Maqsood S., Ouyang Xiaoping. Numerical investigations on the melting process of the nuclear fuel rod in RIAs and LOCAs // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2018. Vol. 124. P. 990–1002. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.04.001>.
9. Ledakowicz S., Piddubniak O. The non-stationary heat transport inside a shafted screw conveyor filled with homogeneous biomass heated electrically // Energies. 2022. Vol. 15. Iss. 17. P. 6164. <https://doi.org/10.3390/en15176164>.
10. Ge Lichao, Liu Xiaoyan, Feng Hongcui, Jiang Han, Zhou Tianhong, Chu Huaqiang, et al. The interaction between microwave and coal: a discussion on the state-of-the-art // Fuel. 2022. Vol. 314. P. 123140. <https://doi.org/10.1016/j.fuel.2022.123140>.

11. Crepeau J.C., Siahpush A., Spotten B. On the Stefan problem with volumetric energy generation // *Heat and Mass Transfer*. 2009. Vol. 46. P. 119–128. <https://doi.org/10.1007/s00231-009-0550-5>.
12. Barannyk L., Crepeau J., Paulus P., Siahpush A. Fourier-Bessel series model for the Stefan problem with internal heat generation in cylindrical coordinates // *Proceedings of the 26th International Conference on Nuclear Engineering ICONE26* (London, 22–26 July 2018). London: ASME, 2018. P. 81009. <https://doi.org/10.1115/icon26-81009>.
13. Alsulami R.A., Zope T.M., Premnath K., Aljaghtam M. Convectively cooled solidification in phase change materials in different configurations subject to internal heat generation: quasi-steady analysis // *Applied Thermal Engineering*. 2023. Vol. 221. P. 119849. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2022.119849>.
14. Crepeau J.C., Sakhnov A.Yu., Naumkin V.S. Stefan problem with internal heat generation: comparison of numerical modeling and analytical solution // *Journal of Physics: Conference Series*. 2019. Vol. 1369. P. 012025. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1369/1/012025>.
15. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
16. Caldwell J., Kwan Y.Y. Numerical methods for one-dimensional Stefan problems // *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 2004. Vol. 20. No. 7. P. 535–545. <https://doi.org/10.1002/cnm.691>.
17. Xu Minghan, Akhtar S., Zueter A.F., Alzoubi M.A., Sushama L., Sasmito A.P. Asymptotic analysis of a two-phase Stefan problem in annulus: application to outward solidification in phase change materials // *Applied Mathematics and Computation*. 2021. Vol. 408. P. 126343. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126343>.
18. Crepeau J., Siahpush A.S. Solid–liquid phase change driven by internal heat generation // *Comptes Rendus Mecanique*. 2012. Vol. 340. Iss. 7. P. 471–476. <https://doi.org/10.1016/j.crme.2012.03.004>.
19. Zhang Guangxu, Shen Wei, Wei Xuezhe. Lithium-ion battery thermal safety evolution during high-temperature nonlinear aging // *Fuel*. 2024. Vol. 362. P. 130845. <https://doi.org/10.1016/j.fuel.2023.130845>.
20. Li He, Zheng Chunshan, Lu Jiexin, Tian Li, Lu Yi, Ye Qing, et al. Drying kinetics of coal under microwave irradiation based on a coupled electromagnetic, heat transfer and multiphase porous media model // *Fuel*. 2019. Vol. 256. P. 115966. <https://doi.org/10.1016/j.fuel.2019.115966>.

References

1. Frank-Kamenetskii D.A. *Fundamentals of macrokinetics. Diffusion and heat transfer in chemical kinetics*. Dolgoprudnyj: Intellekt; 2008, 407 p. EDN: QKBWWN. (In Russ.).
2. Bostandzhiyan S.A., Stolin A.M. The critical conditions of the thermal regime in a generalized couette flow. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 1969;17(1):848-854. <https://doi.org/10.1007/BF00828393>. EDN: PPUFZJ.
3. Donskoy I. Influence of heating conditions on formation and development of agglomerates in a reactive porous medium. *Heat Transfer Research*. 2022;53(12):25-36. <https://doi.org/10.1615/HeatTransRes.2022038756>.
4. Antonov D.V., Fedorenko R.M., Yanovskiy L.S., Strizhak P.A. Physical and mathematical models of micro-explosions: achievements and directions of improvement. *Energies*. 2023;16(16):6034. <https://doi.org/10.3390/en16166034>.
5. Crepeau J., Siahpush A. Approximate solutions to the Stefan problem with internal heat generation. *Heat and Mass Transfer*. 2008;44:787-794. <https://doi.org/10.1007/s00231-007-0298-8>.
6. Fetsov S.S., Lutsenko N.A. A novel computational model and OpenFOAM solver for simulating thermal energy storages based on granular phase change materials: advantages and applicability. *Journal of Energy Storage*. 2023;65:107294. <https://doi.org/10.1016/j.est.2023.107294>.
7. Rocha T.T.M., Trevizoli P.V., De Oliveira R.N. A timeline of the phase-change problem for latent thermal energy storage systems: a review of theoretical approaches from the 1970's to 2022. *Solar Energy*. 2023;250:248-284. <https://doi.org/10.1016/j.solener.2022.12.035>.
8. Tang Jiannan, Huang Mei, Zhao Yuanyuan, Maqsood S., Ouyang Xiaoping. Numerical investigations on the melting process of the nuclear fuel rod in RIAs and LOCAs. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2018;124:990-1002. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.04.001>.
9. Ledakowicz S., Piddubniak O. The non-stationary heat transport inside a shafted screw conveyor filled with homogeneous biomass heated electrically. *Energies*. 2022;15(17):6164. <https://doi.org/10.3390/en15176164>.
10. Ge Lichao, Liu Xiaoyan, Feng Hongcui, Jiang Han, Zhou Tianhong, Chu Huaqiang, et al. The interaction between microwave and coal: a discussion on the state-of-the-art. *Fuel*. 2022;314:123140. <https://doi.org/10.1016/j.fuel.2022.123140>.
11. Crepeau J.C., Siahpush A., Spotten B. On the Stefan problem with volumetric energy generation. *Heat and Mass Transfer*. 2009;46:119-128. <https://doi.org/10.1007/s00231-009-0550-5>.
12. Barannyk L., Crepeau J., Paulus P., Siahpush A. Fourier-Bessel series model for the Stefan problem with internal heat generation in cylindrical coordinates. In: *Proceedings of the 26th International Conference on Nuclear Engineering ICONE26*. 22–26 July 2018, London. London: ASME; 2018, p. 81009. <https://doi.org/10.1115/icon26-81009>.
13. Alsulami R.A., Zope T.M., Premnath K., Aljaghtam M. Convectively cooled solidification in phase change materials in different configurations subject to internal heat generation: quasi-steady analysis. *Applied Thermal Engineering*. 2023;221:119849. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2022.119849>.

14. Crepeau J.C., Sakhnov A.Yu., Naumkin V.S. Stefan problem with internal heat generation: comparison of numerical modeling and analytical solution. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019;1369:012025. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1369/1/012025>.
15. Lykov A.V. *Analytical heat diffusion theory*. Moscow: Vysshaya shkola; 1967, 600 p. (In Russ.).
16. Caldwell J., Kwan Y.Y. Numerical methods for one-dimensional Stefan problems. *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 2004;20(7):535-545. <https://doi.org/10.1002/cnm.691>.
17. Xu Minghan, Akhtar S., Zueter A.F., Alzoubi M.A., Sushama L., Sasmito A.P. Asymptotic analysis of a two-phase Stefan problem in annulus: application to outward solidification in phase change materials. *Applied Mathematics and Computation*. 2021;408:126343. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126343>.
18. Crepeau J., Siahpush A.S. Solid-liquid phase change driven by internal heat generation. *Comptes Rendus Mecanique*. 2012;340(7):471-476. <https://doi.org/10.1016/j.crme.2012.03.004>.
19. Zhang Guangxu, Shen Wei, Wei Xueze. Lithium-ion battery thermal safety evolution during high-temperature nonlinear aging. *Fuel*. 2024;362:130845. <https://doi.org/10.1016/j.fuel.2023.130845>.
20. Li He, Zheng Chunshan, Lu Jiexin, Tian Li, Lu Yi, Ye Qing, et al. Drying kinetics of coal under microwave irradiation based on a coupled electromagnetic, heat transfer and multiphase porous media model. *Fuel*. 2019;256:115966. <https://doi.org/10.1016/j.fuel.2019.115966>.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Донской Игорь Геннадьевич,
к.т.н.,
старший научный сотрудник лаборатории
термодинамики,
Институт систем энергетики
им. Л.А. Мелентьева СО РАН,
664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 130, Россия
✉ donskoy.chem@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0003-2309-8461>

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Igor G. Donskoy,
Cand. Sci. (Eng.),
Senior Researcher of the Thermodynamics Laboratory,
Melentiev Energy Systems Institute SB RAS,
130 Lermontov St., Irkutsk 664033, Russia
✉ donskoy.chem@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0003-2309-8461>

Вклад автора

Автор выполнил аналитическую работу, на основании полученных результатов провел обобщение, подготовил рукопись к печати.

Contribution of the author

The author performed a comprehensive analysis, made a generalization on the basis of the results obtained and prepared the copyright for publication.

Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interests

The author declares no conflict of interests.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

The final manuscript has been read and approved by the author.

Информация о статье

Статья поступила в редакцию 01.03.2024 г.; одобрена после рецензирования 08.04.2024 г.; принята к публикации 12.05.2024 г.

Information about the article

The article was submitted 01.03.2024; approved after reviewing 08.04.2024; accepted for publication 12.05.2024.