



Оригинальная статья / Original article

УДК 519.862.6

DOI: <http://dx.doi.org/10.21285/1814-3520-2018-4-101-110>

МНОЖЕСТВЕННОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ И КРИТЕРИЙ СОГЛАСОВАННОСТИ ПОВЕДЕНИЯ В РЕГРЕССИОННОМ АНАЛИЗЕ

© С.И. Носков¹, М.П. Базилевский²

Иркутский государственный университет путей сообщения,
664074, Российская Федерация, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15.

РЕЗЮМЕ. ЦЕЛЬ. В регрессионном анализе разработан широкий арсенал методов оценивания неизвестных параметров моделей регрессии. Одним из таких методов является метод множественного оценивания, заключающийся в одновременной минимизации ошибок сразу по двум критериям – методу наименьших модулей и методу антиробастного оценивания. При этом оценки регрессионной модели, полученные с помощью множественного оценивания, определяются неявным образом, что затрудняет работу с ними. Целью данной работы является привлечение критерия согласованности поведения для выделения из множественных оценок единственного вектора параметров. **МЕТОДЫ.** Для достижения цели использованы математические и статистические методы. **РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ.** В работе дано краткое описание задачи множественного оценивания регрессионных моделей, представляющей собой задачу линейного программирования. Показано, что этот метод дает неявное представление оценок регрессионных моделей. Для выбора из множества оценок единственного вектора параметров использован критерий согласованности поведения. При этом сформулирована задача множественного оценивания регрессионных моделей с одновременной максимизацией значения критерия согласованности поведения, относящаяся к классу задач линейно-булевого линейного программирования. Представленная методика использована для решения задачи моделирования грузооборота транспорта Красноярской железной дороги. **ВЫВОДЫ.** Сформулированная в работе задача обеспечивает не только паретовость вектора оцениваемых параметров в двухкритериальной задаче оценивания, но и максимальную согласованность в поведении фактических и расчетных значений зависимой переменной.

Ключевые слова: регрессионная модель, метод наименьших модулей, метод антиробастного оценивания, метод множественного оценивания, множество Парето, критерий «согласованности поведения».

Информация о статье. Дата поступления 21 февраля 2018 г.; дата принятия к печати 3 апреля 2018 г.; дата онлайн-размещения 30 апреля 2018 г.

Формат цитирования. Носков С.И., Базилевский М.П. Множественное оценивание параметров и критерий согласованности поведения в регрессионном анализе // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2018. Т. 22. № 4. С. 101–110. DOI: 10.21285/1814-3520-2018-4-101-110

MULTIPLE PARAMETER ESTIMATION AND BEHAVIOR CONSISTENCY CRITERION IN REGRESSION ANALYSIS

S.I. Noskov, M.P. Bazilevsky

Irkutsk State Transport University,
15, Chernyshevsky St., Irkutsk, 664074, Russian Federation

ABSTRACT. PURPOSE. A wide range of methods for estimating unknown parameters of regression models has been developed in the regression analysis. One of these methods is a multiple estimation method that is based on simultaneous minimization of errors by two criteria – the least absolute deviation method and the method of anti-robust estimation. In this case, the estimates of the regression model obtained through multiple estimation are determined implicitly which makes the work with them difficult. The purpose of this paper is to involve the criterion of behavior consistency in order to identify

¹Носков Сергей Иванович, доктор технических наук, профессор кафедры информационных систем и защиты информации, e-mail: sergey.noskov.57@mail.ru

Sergey I. Noskov, Doctor of technical sciences, Professor of the Department of Information Systems and Data Protection, e-mail: sergey.noskov.57@mail.ru

²Базилевский Михаил Павлович, кандидат технических наук, доцент кафедры математики, e-mail: mik2178@yandex.ru

Mikhail P. Bazilevsky, Candidate of technical sciences, Associate Professor of the Department of Mathematics, e-mail: mik2178@yandex.ru



a single parameter vector from multiple estimates. **METHODS.** The purpose is achieved through the use of mathematical and statistical methods. **RESULTS AND THEIR DISCUSSION.** The paper briefly describes the problem of multiple estimation of regression models, which is a linear programming problem. This method is shown to give an implicit representation of estimates of regression models. The criterion of behavior consistency is used to select a single parameter vector from a set of estimates. In this case, the problem of multiple estimation of regression models is formulated with simultaneous maximization of the value of the consistency criterion of behavior, which belongs to the class of problems of linear-boolean linear programming. The presented methodology has been used to solve the problem of Krasnoyarsk Railways freight turnover modeling. **CONCLUSIONS.** The problem formulated in the work provides both the Pareto optimality of the estimated parameter vector in the two-criteria estimation problem and the maximum consistency in the behavior of the actual and calculated values of the dependent variable.

Keywords: regression model, least absolute deviation method, method of anti-robust estimation, multiple estimation method, Pareto set, criterion of behavior consistency

Information about the article. received February 21, 2018; accepted for publication April 3, 2018; available online April 30, 2018.

For citation. Noskov S.I., Bazilevsky M.P. Multiple parameter estimation and behavior consistency criterion in regression analysis. Proceedings of Irkutsk State Technical University. 2018, vol. 22, no. 4, pp. 101–110. (In Russian). DOI: 10.21285/1814-3520-2018-4-101-110

Введение

В регрессионном анализе задача оценивания параметров модели регрессии является одной из ключевых. Для ее решения разработан широкий арсенал методов. Самым распространенным из них является метод наименьших квадратов (МНК) [1, 2], суть которого состоит в минимизации суммы квадратов ошибок. Эффективность МНК резко снижается, когда обрабатываемая выборка содержит так называемые выбросы. В этом случае можно использовать метод наименьших модулей (МНМ) [3, 4], который позволяет получать робастные оценки, т.е. менее чувствительные, чем МНК-оценки, к выбросам. В определенном смысле противоположным по отношению к МНМ является метод антиробастного оценивания (МАО) [5, 6], который следует применять тогда, когда исследователь убежден в уникальности

каждого наблюдения выборки и когда длина ее сильно ограничена. Оценки МНМ и МАО находятся с помощью решения задач линейного программирования. В работах [7, 8] предложен метод множественного оценивания параметров линейной регрессии, заключающийся в совместном использовании двух критериев, соответствующих МНМ и МАО. Решением этой многокритериальной задачи является модель, в которой параметры определяются неявным образом, поэтому работать с такой регрессией трудно. Для выделения из множества оценок единственного вектора параметров необходимо привлечь, например, какой-либо дополнительный критерий адекватности регрессионной модели. В данной работе в качестве такого критерия выступает критерий согласованности поведения [9–12].

Множественное оценивание

Рассмотрим линейное регрессионное уравнение:

$$y_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^m \alpha_j x_{ij} + \varepsilon_i, \\ i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где y – объясняемая (зависимая), а x_i – i -я объясняющая (независимая) переменная;

α_i – i -й подлежащий оцениванию параметр;
 ε – ошибки аппроксимации, i – номер наблюдения, n – число наблюдений (объем выборки).

В работе [7] поставлена задача множественного оценивания параметров уравнения (1) с векторной функцией потерь $J(\alpha) = (J_1(\alpha), J_\infty(\alpha))$. При этом первая ее



компонента соответствует методу наименьших модулей, игнорирующему выбросы, а вторая – методу антиробастного оценивания, сильно к ним тяготеющему.

В [7] показано, что такая задача сводится к многокритериальной задаче линейного программирования (МЛП) с $2(n+m)+1$ переменными и $2n$ ограничениями:

$$y = X\alpha^1 - X\alpha^2 + u - v, \quad (2)$$

$$u_i + v_i - r \leq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

условиями неотрицательности переменных

$$\alpha^1 \geq 0, \quad \alpha^2 \geq 0, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0 \quad (4)$$

и векторной целевой функцией

$$J(\alpha) = \left(\sum_{i=1}^n (u_i + v_i), r \right). \quad (5)$$

Обозначим через $Z \subset R^{2(n+m)+1}$ множество векторов $z = (\alpha^1, \alpha^2, u, v, r)$, удовлетворяющих ограничениям (2)–(5), а через $P \subseteq Z$ – множество Парето в задаче МЛП.

Для его построения можно воспользоваться разработанным авторами многокритериальным симплекс-методом [13], основанном на факте:

$$z^0 \in P \Leftrightarrow J^0 = 0, \quad (6)$$

где

$$J^0 = d_1 + d_\infty \rightarrow \max_Z, \quad (7)$$

$$\tilde{Z} = \{(z, d) \mid z \in Z, J_s(z) + d_s \leq J_s(z^0), d_s \geq 0, s = 1, \infty\}.$$

В работе [13] предлагается два способа формирования множества паретовских вершин P^* многогранника Z в многокритериальной линейной задаче (2)–(5). Первый основан на многокритериальном симплекс-методе, а второй – на переборе узлов рав-

номерной сети на интервале (0,1) при построении свертки частных критериев

$$J_\gamma(z) = \gamma J_1(z) + (1-\gamma) J_\infty(z), \quad \gamma \in (0,1).$$

Упорядочим по возрастанию одной из компонент (например, первой) значения элементов множества образов паретовских вершин симплекса Z в критериальном пространстве $J(P^*) = (J^1, J^2, \dots, J^g)$.

Множество Парето в критериальном пространстве $J(P)$ является объединением ребер S , соединяющих соседние паретовские вершины симплекса $J(Z)$:

$$J(P) = \bigcup_{j=1}^{g-1} S(J^j, J^{j+1}). \quad (8)$$

Прообразами ребер $S(J^j, J^{j+1})$ являются множества векторов $z \in Z$, удовлетворяющие ограничениям:

$$\sum_{k=1}^n (u_k + v_k) = \lambda J_1^j + (1-\lambda) J_1^{j+1}, \quad (9)$$

$$r = \lambda J_\infty^j + (1-\lambda) J_\infty^{j+1}, \quad j = \overline{1, g-1}, \quad (10)$$

$$0 \leq \lambda \leq 1. \quad (11)$$

Обозначим через C^j множество векторов $z \in R^{2(m+n)+1}$, удовлетворяющих ограничениям (2)–(4), (9)–(11). Тогда множество P представимо в виде

$$P = \bigcup_{j=1}^{g-1} C^j. \quad (12)$$

В качестве вектора параметров α регрессионного уравнения (1) можно принять любой вектор

$$\alpha = (z_1 - z_{m+1}, z_2 - z_{m+2}, \dots, z_m - z_{2m})$$

при $z \in P$.

Безусловно, с такой формой задания модели, в которой параметры определены



неявным образом, работать трудно. Поэтому в [8] представлены некоторые конструктивные приемы, облегчающие эту работу: точечная характеристика множества Парето, построение множества A и др.

Способ точечной характеристики множества Парето [8] позволяет оперировать не со всем множеством, а с неким его «полномочным представителем». Таким представителем может быть, например,

центр тяжести $J^0 = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^g J^i$ множества

$J(P)$. Очевидно, что J^0 не будет являться паретовской точкой многогранника $J(P)$. Для определения точки J^* , максимально улучшающей J^0 по обоим критериям одновременно, необходимо воспользоваться программой отсутствия мажорирования [7]. Решение этой задачи z^* и будет являться искомой точечной характеристикой множества P .

Множество $A = \{\alpha \in R^m \mid \alpha_i \in [\underline{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i]\}$

[8], которому гарантированно будут принадлежать вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^T$ с компонентами $\alpha_i = z_i - z_{i+m}$, $i = \overline{1, m}$, представляет собой параллелепипед в m -мерном пространстве, в который вписана проекция $\bar{P}$

множества P на R^m . Очевидно, что справедливы равенства $\underline{\alpha}_i = \underline{\alpha}_i^1 - \bar{\alpha}_i^2$, $\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_i^1 - \underline{\alpha}_i^2$, где $\underline{\alpha}_i^1$, $\underline{\alpha}_i^2$ и $\bar{\alpha}_i^1$, $\bar{\alpha}_i^2$ – соответственно минимально и максимально возможные значения положительных и отрицательных частей компонент вектора оцениваемых параметров. Для построения множества A необходимо для каждого параметра α_i решить $2(g-1)$ следующих задач ЛП:

$$\underline{\alpha}_i^j = \min_{z \in C^j} (\alpha_i^1 - \alpha_i^2),$$

$$\bar{\alpha}_i^j = \max_{z \in C^j} (\alpha_i^1 - \alpha_i^2),$$

$$j = \overline{1, g-1}.$$

Тогда $\underline{\alpha}_i$ и $\bar{\alpha}_i$ отыщутся по формулам:

$$\underline{\alpha}_i = \min_{j=1, g-1} \underline{\alpha}_i^j, \quad \bar{\alpha}_i = \max_{j=1, g-1} \bar{\alpha}_i^j.$$

Для выделения из множества P единственного вектора параметров необходимо привлечь некие дополнительные соображения, например, «подключить» еще какой-то критерий адекватности регрессионных моделей. Сделать это можно следующим образом.

Множественное оценивание и критерии согласованности поведения

Существует важный аспект в оценке качества статистических зависимостей, не связанный напрямую с точностью аппроксимации, а отражающий степень согласованности в характере изменения (поведении) расчетных и фактических значений зависимой переменной на различных наблюдениях выборки. В работах [10, 12] предложены некоторые способы формализации отражающего этот аспект критерия «согласованность поведения» $\Phi(\alpha)$ и корректировки оценок параметров регрессий на его основе.

Представим уравнение (1) в виде

$$y_i = \hat{y}_i + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n},$$

где $\hat{y}_i$ – расчетное i -е значение зависимой переменной. Тогда $\Phi(\alpha)$ можно представить в виде

$$\Phi(\alpha) = \sum_{i=1}^{n-1} \text{sign}(y_{i+1} - y_i) \text{sign}(\hat{y}_{i+1} - \hat{y}_i). \quad (13)$$

Единственность вектора параметров, принадлежащих множеству Парето P , достигается решением задачи



$$\frac{1}{n} J_1(\alpha) + J_\infty(\alpha) - M\Phi(\alpha) \rightarrow \min, \alpha \in P, (14)$$

с заранее выбранным числом M .

Присутствие в (14) первых двух компонент вызвано тем, что максимальная согласованность поведения может достигаться на множестве векторов из P .

В связи с наличием в (14) операции sign введем в рассмотрение булевы переменные σ_j следующим образом:

$$\sigma_j = \begin{cases} 1, & \text{sign}[(y_{j+1} - y_j)(\hat{y}_{j+1} - \hat{y}_j)] = 1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда задача (14) эквивалентна задаче линейно-булевого программирования (ЛБП) с ограничениями (2)–(4), (9)–(11), а также

$$(y_{k+1} - y_k) \sum_{j=1}^m \alpha_j (x_{k+1,j} - x_{kj}) + N\sigma_k \geq N + \delta, k \in K, (15)$$

$$\sigma_k \in \{0,1\}, k \in K, (16)$$

и целевой функцией

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u_i + v_i) + r - M \sum_{j \in K} \sigma_j \rightarrow \min, (17)$$

где N – заранее выбранное большое отрицательное число, $K = \{1, 2, \dots, n-1\} \setminus K_0$, где $K_0 = \{k \mid |y_{k+1} - y_k| < \delta\}$, δ – малая положительная константа. Смысл ее введения состоит в задании меры «безразличия» между близкими значениями зависимой переменной.

Моделирование грузооборота транспорта Красноярской железной дороги

Железнодорожный транспорт является важнейшей отраслью страны, играющей роль в ее успешном развитии. Он представляет собой исключительно сложную для анализа многоуровневую иерархическую неоднородную систему, управление которой представляет собой весьма сложную задачу, требующую успешного решения. Моделирование грузооборота железнодорожного транспорта по Красноярской железной дороге (КЖД) с помощью разработанной методики множественного оценивания регрессионных моделей осуществлялось по статистической информации из работ [14, 15] за период с 2000 г. по 2015 г. по следующим показателям: y – грузооборот, млн т км; x_1 – прием порожних вагонов, штук; x_2 – динамическая нагрузка, т. км / км; x_3 – среднесуточный пробег локомотива, км; x_4 – эксплуатируемый парк локомотивов, штук; x_5 – техническая скорость, км / час; x_6 – рабочий парк вагонов дороги, штук; z – провозная способность железнодорожной линии, млн т км.

Переменная y является эксплуатационным показателем, определяющим функционирование КЖД в смысле грузовой работы; переменные x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 и x_6 являются управляющими факторами, т.е. поддающимися регулированию со стороны руководства дорогой; переменная z является внешним показателем, не поддающимся оперативному регулированию на местном уровне. Коэффициент корреляции переменной y с переменной x_1 равен 0,937; с x_2 – 0,803; с x_3 – 0,429; с x_4 – 0,942; с x_5 – 0,755; с x_6 – 0,856; с z – 0,709.

Оцененная с помощью МНМ линейная регрессионная модель переменной y от переменных $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, z$ имеет вид:

$$y = -124868 + 2,808x_1 - 193,798x_2 + 30,703x_3 + 131,48x_4 + 1636,47x_5 + 0,222x_6 + 45999,5z. (18)$$

Для этой регрессии сумма модулей



остатков $J_1 = 16868,96$, максимальный абсолютный остаток $J_\infty = 6440,35$, а критерий согласованности поведения $\Phi = 10$ при своем максимальном значении 14. Такое значение критерия Φ говорит о несогласованности двух знаков приращений фактических и расчетных значений зависимой переменной y .

Для построения множества Парето $J(P^*)$ и точечной характеристики множества P был использован программный комплекс МОМ (Множественное Оценивание Регрессионных Моделей) [16]. Множество Парето $J(P^*)$, состоящее из 11 вершин, представлено в табл. 1.

Множество Парето в критериальном пространстве с обозначением ребер представлено на рис. 1.

Точечная характеристика множества P имеет вид:

$$y = -63542,438 + 2,888x_1 - 391,157x_2 + 88,365x_3 + 133,445x_4 + 368,02x_5 + 0,404x_6 + 8823,999z. \quad (19)$$

Для этой регрессии $J_1 = 18838,6$, $J_\infty = 2961,48$, $\Phi = 10$. По значениям критериев J_1 и J_∞ видно, что модель (18) ближе в критериальном пространстве к точке 11, а модель (19) – к точке 6.

Множество A имеет вид:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &\in [-124900; -53770], \\ \alpha_1 &\in [2,099; 6,969], \\ \alpha_2 &\in [-753,5; 192,3], \\ \alpha_3 &\in [24,33; 88,36], \\ \alpha_4 &\in [92,06; 158,5], \\ \alpha_5 &\in [-533,6; 1636], \\ \alpha_6 &\in [0,155; 0,408], \\ \alpha_7 &\in [8765; 67330]. \end{aligned}$$

Таблица 1

Паретовские вершины

Table 1

Pareto peaks

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
J_1	23350	22980	22770	19160	19050	18810	18460	17700	17480	17060	16870
J_∞	2185	2205	2220	2804	2835	2952	3394	4421	4877	5848	6440

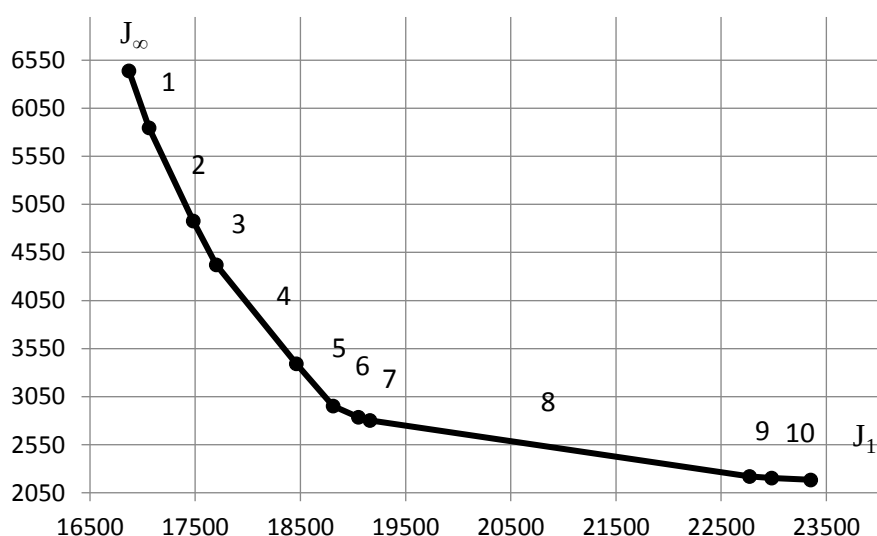


Рис. 1. Множество Парето
Fig. 1. Pareto set



По этим промежуткам можно судить о значимости коэффициентов регрессии (по аналогии с доверительными интервалами для параметров модели). Так как промежутки для коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6, \alpha_7$ не содержат гипотетических значений, равных нулю, то такие коэффициенты следует признать значимыми. Тогда параметры α_2 и α_5 являются незначимыми. Это, возможно, является причиной того, что в моделях (18) и (19) оценки параметров при переменной x_2 оказались отрицательными, что противоречит явлению положительной корреляции между переменными y и x_2 .

Решение задачи линейно-булевого программирования (2)–(4), (9)–(11), (15)–(17) осуществлялось вручную в пакете LP Solve. При этом задавались следующие параметры:

- точность целого числа $\Delta = 10^{-7}$;
- большое положительное число $M = 1000$;
- большое отрицательное число $N = -100000000$;
- малое число $\delta = 0,001$.

Результаты моделирования представлены ниже.

Ребро 1:

$$y = -111774,56 + 3,555x_1 - 305,655x_2 + 27,469x_3 + 138,328x_4 + 1282,659x_5 + 0,188x_6 + 56820,245z, \quad (20)$$

значение целевой функции

$$C = -5723,5, \quad \lambda = 0,493, \\ J_1 = 17002,86, \quad J_\infty = 6147,08, \quad \Phi = 12.$$

Ребро 2:

$$y = -86986,26 + 4,5x_1 - 584,931x_2 + 32,351x_3 + 150,649x_4 + 878,265x_5 + 0,166x_6 + 57652,56z, \quad (21)$$

$$C = -6483,26, \quad \lambda = 0,497, \\ J_1 = 17338,08, \quad J_\infty = 5374,82, \quad \Phi = 12.$$

Ребро 3:

$$y = -106160 + 2,237x_1 - 400,529x_2 + 48,665x_3 + 151,28x_4 + 1413,93x_5 + 0,242x_6 + 28104,65z, \quad (22)$$

$$C = -7117,93, \quad \lambda = 0,616, \quad J_1 = 17636,94, \\ J_\infty = 4711,73, \quad \Phi = 12.$$

Ребро 4:

$$y = -110836,422 + 0,879x_1 + 172,818x_2 + 81,373x_3 + 110,288x_4 + 1101,473x_5 + 0,455x_6 + 5836,76z, \quad (23)$$

$$C = -8526,146, \quad \lambda = 0,829, \quad J_1 = 18353,86, \\ J_\infty = 4233,21, \quad \Phi = 14.$$

Ребро 5:

$$y = -110127,2 + 0,0997x_1 + 215,294x_2 + 83,343x_3 + 122,872x_4 + 898,777x_5 + 0,44x_6 + 9663,21z, \quad (24)$$

$$C = -8407,585, \quad \lambda = 0,867, \\ J_1 = 18766,52, \quad J_\infty = 3337,26, \quad \Phi = 12.$$

Ребро 6:

$$y = -60108,318 + 2,796x_1 - 260,368x_2 + 85,433x_3 + 131,29x_4 + 89,52x_5 + 0,398x_6 + 16871,427z, \quad (25)$$

$$C = -7837,777, \quad \lambda = 0,503, \\ J_1 = 18966,52, \quad J_\infty = 2917,93, \quad \Phi = 10.$$

Ребро 7:

$$y = -68268 + 2,193x_1 + 37,144x_2 + 82,766x_3 + 125,149x_4 - 120,6x_5 + 0,406x_6 + 26481,085z, \quad (26)$$

$$C = -7899,924, \quad \lambda = 0,514, \\ J_1 = 19115,39, \quad J_\infty = 2833,88, \quad \Phi = 10.$$



Ребро 8:

$$y = -80933,99 + 2,963x_1 + 193,117x_2 + \\ + 77,712x_3 + 101,638x_4 + 16,448x_5 + \\ + 0,476x_6 + 34509,83z, \quad (27)$$

$$C = -10007,555, \quad \lambda = 0,591, \\ J_1 = 21291,35, \quad J_\infty = 2569,98, \quad \Phi = 14.$$

Ребро 9:

$$y = -55135,228 + 6,923x_1 + 153,749x_2 + \\ + 65,686x_3 + 98,936x_4 - 510,806x_5 + \\ + 0,364x_6 + 41391,132z, \quad (28)$$

$$C = -9255,246, \quad \lambda = 0,487, \\ J_1 = 22857,71, \quad J_\infty = 2225,17, \quad \Phi = 12.$$

Ребро 10:

$$y = -60127,435 + 6,747x_1 + 177,59x_2 + \\ + 66,02x_3 + 94,699x_4 - 415,637x_5 + \\ + 0,388x_6 + 41643,67z, \quad (29)$$

$$C = -9252,75, \quad \lambda = 0,504, \\ J_1 = 23170,39, \quad J_\infty = 2197,62, \quad \Phi = 12.$$

Как видно, в регрессионных моделях (23) и (27) значение критерия согласованности поведения максимально и равно 14. По нашему мнению, на практике лучше воспользоваться моделью (23), поскольку в целом она имеет лучшие аппроксимационные качества (по критерию J_1), чем регрессия (27). При этом, сравнивая модель (23) с регрессией (18), оцененной по-обычному МНМ, можно сказать, что согласованность модели (23) хоть и увеличилась, но при этом ее качество снизилось существенно: с $J_1 = 16868,96$ до $J_1 = 18353,86$. А сравнивая модель (23) с точечной характеристикой (19) можно сделать вывод, что регрессия (23) лучше уравнения (19) сразу по двум критериям: J_1 и Φ .

Графики фактических и расчетных по модели (23) значений зависимой переменной y представлены на рис. 2.

На рис. 2 сплошной линией обозначен график фактических значений переменной y , а пунктиром – расчетных. По этим графикам четко прослеживается полная согласованность фактической и расчетной траекторий изменения зависимой переменной y .

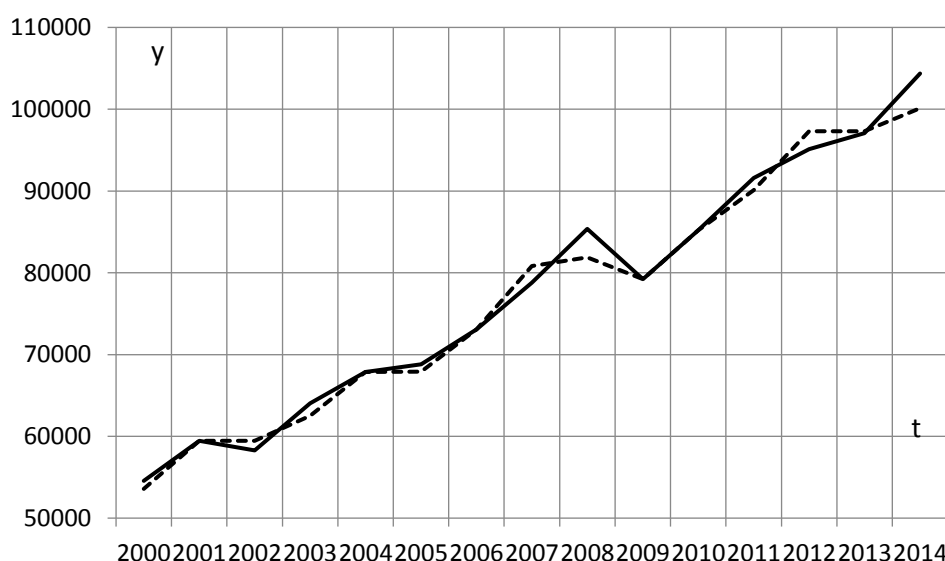


Рис. 2. График фактических и расчетных значений грузооборота
Fig. 2. Graph of actual and estimated values of freight turnover



Заключение

Таким образом, решение задачи ЛБП (2)–(4), (9)–(11), (15)–(17) обеспечивает не только паретовость вектора оцениваемых параметров в двухкритериальной задаче

оценивания, но и максимальную согласованность в поведении фактических и расчетных значений зависимой переменной.

Библиографический список

1. Айвазян С.А. Методы эконометрики. М.: Магистр: ИНФРА-М, 2010. 512 с.
2. Магнус, Я.Р. Эконометрика. Начальный курс. М.: Дело, 2004. 576 с.
3. Bloomfield P. Least absolute deviations: theory, applications, and algorithms / P. Bloomfield, W.L. Steiger. Birkhauser, 1983. P. 364.
4. Мудров В.И., Кушко В.Л. Метод наименьших модулей. М.: Знание, 1971. 60 с.
5. Демиденко, Е.З. Линейная и нелинейная регрессии. М.: Финансы и статистика, 1981. 304 с.
6. Wagner H.M. Linear programming techniques for regression analysis. JASA, 1959. Vol. 54. No. 285.
7. Носков С.И. Технология моделирования объектов с нестабильным функционированием и неопределенностью в данных. Иркутск: РИЦ ГП «Облформпечать», 1996. 321 с.
8. Носков С.И., Баенхаева А.В. Множественное оценивание параметров линейного регрессионного уравнения // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2016. № 3. С. 133–138.
9. Носков С.И. Коррекция параметров регрессионных уравнений по критерию «согласованности поведения» // Материалы Всесоюзной конф. «Информатизация и моделирование территориальных социально-экономических объектов». Тезисы докл. Ч. 2. (г. Новосибирск, 4–6 декабря 1990 г.). Новосибирск, 1990. С. 12–14.
10. Носков С.И. Построение эконометрических зависимостей с учетом критерия «согласованности поведения» // Кибернетика и системный анализ. 1994. № 1. С. 177–180.
11. Базилевский М.П., Носков С.И. Программный комплекс построения линейной регрессионной модели с учетом критерия согласованности поведения фактической и расчетной траекторий изменения значений объясняемой переменной // Вестник ИргТУ. Иркутск, 2017. Т. 21. № 9. С. 37–44. <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2017-9-37-44>
12. Носков С.И. Критерий «согласованность поведения» в регрессионном анализе // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2013. № 1. С. 107–111.
13. Yu, L. The set of all nondominated solutions in linear cases and multicriteria simplex method / L. Yu, M. Zeleny // J. of Math. Anal. and Applic. 1975. Vol. 49. P. 430–468.
14. Базилевский М.П. Среднесрочное прогнозирование эксплуатационных показателей функционирования Красноярской железной дороги / М.П. Базилевский, И.П. Врублевский, С.И. Носков, И.С. Яковчук // Фундаментальные исследования. Москва, 2016. № 10(3). С. 471–476.
15. Носков С.И., Врублевский И.П., Носков С.И., Яковчук И.С. Регрессионная модель динамики эксплуатационных показателей функционирования железнодорожного транспорта // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2016. № 2. С. 192–197.
16. Баенхаева А.В., Базилевский М.П., Носков С.И. Программный комплекс множественного оценивания регрессионных моделей // Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем. 2016. № 17. С. 42–47.

References

1. Ajvazjan S.A. *Metody jekonometriki. Magistr* [Methods of Econometrics]. Moscow: INFRA-M Publ., 2010. 512 p.
2. Magnus Ja.R. *Jekonometrika. Nachal'nyj kurs Magnus* [Econometrics. Introductory course]. Moscow: Business Publ., 2004. 576 p.
3. Bloomfield P. Least absolute deviations: theory, applications, and algorithms / P. Bloomfield, W.L. Steiger. Birkhauser, 1983, pp. 364.
4. Mudrov V.I. *Metod naimen'shih modulei* [Method of Least Modules]. Moscow: Knowledge Publ., 1971, 60 p.
5. Demidenko E.Z. *Linejnaja i nelinejnaja regressii* [Linear and nonlinear regressions]. Moscow: Finance and Statistics Publ., 1981, 304 p.
6. Wagner H.M. Linear programming techniques for regression analysis. JASA, 1959, vol. 54, no. 285.
7. Noskov S.I. *Tehnologija modelirovanija ob'ektov s nestabil'nym funkcionirovaniem i neopredelennost'ju v dannyh* [Modeling technology for objects with unstable operation and data uncertainty]. Irkutsk: RIC GP «Obllinformpechat'» Publ., 1996, 321 p.
8. Noskov S.I. Multiple estimation of parameters for the linear regression equation. *Sovremennye tehnologii. Sistemyj analiz. Modelirovanie* [Modern technologies. System analysis. Modeling], 2016, no. 3, pp. 133–138.
9. Noskov S.I. *Korrekcija parametrov regressionnyh uravnenij po kriteriju «sogla-sovannosti povedenija»* [Correction of regression equation parameters by the cri-



terion of the "consistency of behavior"]. *Materiali Vsesoiuznoi konferensii "Informatizacija i modelirovanie territorial'nyh social'no-jekonomicheskikh ob'ektov"* [Proceedings of the All-Russia Conference "Informatization and Modeling of Territorial Socio-Economic Objects" Novosibirsk, 4–6 December 1990]. Novosibirsk, 1990, pp. 12–14.

10. Noskov S.I. Construction of econometric dependencies taking into account the criterion of "consistency of behavior". *Kibernetika i sistemnyj analiz* [Cybernetics and system analysis]. 1994, no. 1, pp. 177–180.

11. Bazilevskij M.P. Program complex for linear regression model construction considering behavior consistency criterion of actual and calculated trajectories of explained variable value change. [Proceedings of Irkutsk State Technical University]. Irkutsk, 2017, vol. 21, no. 9, p. 37–44. <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2017-9-37-44>

12. Noskov S.I. The criterion of «consistency of behavior» in the regression analysis. *Sovremennye tehnologii*.

Sistemnyj analiz. Modelirovanie [Modern technologies. System analysis. Modeling], 2013, no. 1, pp. 107–111.

13. Yu L., Zeleny M. The set of all nondominated solutions in linear cases and multicriteria simplex method J. of Math. Anal. and Applic, 1975, vol. 49, pp. 430–468.

14. Bazilevskij M.P., Vrublevskij I.P., Noskov S.I., Jakovchuk I.S. Medium-term forecasting of performance indicators of functioning of Krannoyarsk railway. *Fundamental'nye issledovaniya* [Fundamental Research], 2016, № 10 (3), pp. 471–476.

15. Noskov S.I. Railway transport functioning the regression model performance indicators dynamics. *Sovremennye tehnologii. Sistemnyj analiz. Modelirovanie* [Modern technologies. System analysis. Modeling], 2016, no. 2, pp. 192–197.

16. Baenhaeva A.V., Bazilevskij M.P., Noskov S.I. Programmatic complex of multiple estimation of regression models. *Informacionnye tehnologii i problemy matematicheskogo modelirovaniya slozhnyh system* [Information technologies and problems of complex system mathematical modeling], 2016, Issue. 17, pp. 42–47.

Критерии авторства

Носков С.И., Базилевский М.П. имеют на статью равные авторские права и несут равную ответственность за плагиат.

Authorship criteria

Noskov S.I., Bazilevskiy M.P. have equal author's rights and bear equal responsibility for plagiarism.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interests

The authors declare that there is no conflict of interests regarding the publication of this article.