



Научная статья

УДК 531.3:007, 534.014, 621.802, 62.752

<https://doi.org/10.21285/1814-3520-2022-3-368-385>

## Технология структурного математического моделирования технических объектов в условиях вибрационного нагружения: формы взаимодействий и динамические инварианты

Андрей Владимирович Елисеев<sup>1✉</sup>, Николай Константинович Кузнецов<sup>2</sup><sup>1</sup>Иркутский государственный университет путей сообщения, г. Иркутск, Россия,<sup>1,2</sup>Иркутский национальный исследовательский технический университет, г. Иркутск, Россия<sup>1</sup>eavsh@ya.ru, <http://orcid.org/0000-0003-0222-2507><sup>2</sup>knik@istu.edu, <http://orcid.org/0000-0002-3083-0182>

**Резюме.** Цель исследования заключается в развитии системного подхода к оценке динамических форм взаимодействий элементов механических колебательных систем, используемых в качестве расчетных схем технических объектов транспортного или технологического назначения. Методологической основой исследования является структурное математическое моделирование, в рамках которого механическая колебательная система (с конечным числом степеней свободы) сопоставляется со структурной схемой эквивалентной в динамическом отношении системы автоматического управления. Объектом исследования служит семейство механических колебательных систем с конечным числом степеней свободы, находящихся под воздействием связанных силовых гармонических возмущений. В качестве предмета исследования выступает совокупность динамических состояний технического объекта, вызванных приложением на различных частотах синфазных внешних силовых возмущений, которые характеризуются коэффициентом связности. Для семейства цепных механических колебательных систем с двумя степенями свободы разработан метод интерпретации совокупности динамических состояний в виде ориентированных графов. Разработан формальный метод построения графа совокупности динамических состояний на основе амплитудно-частотных характеристик передаточных функций системы. Показано, что в рамках разработанной интерпретации графы динамических состояний могут рассматриваться как своеобразные инварианты, сохраняющиеся на множествах параметров механических колебательных систем. На методологической базе структурного математического моделирования разработана концепция динамических инвариантов, в рамках которой совокупность динамических инвариантов может быть использована для обобщенной оценки многообразия динамических состояний и форм динамических взаимодействий элементов механических колебательных систем. Предложенная концепция динамических инвариантов расширяет методологию структурного математического моделирования применительно к задачам системного анализа обеспечения безопасности работы технических объектов транспортного и технологического назначения, находящихся в условиях связанных вибрационных нагружений.

**Ключевые слова:** механические колебательные системы, структурное математическое моделирование, режимы динамического гашения колебаний, динамические формы взаимодействий, динамические инварианты

**Для цитирования:** Елисеев А. В., Кузнецов Н. К. Технология структурного математического моделирования технических объектов в условиях вибрационного нагружения: формы взаимодействий и динамические инварианты // iPolytech Journal. 2022. Т. 26. № 3. С. 368–385. <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2022-3-368-385>.

### MECHANICAL ENGINEERING

Original article

## A technology of structural mathematical modelling for engineering objects under vibrational loading: Interaction forms and dynamic invariants

Andrey V. Eliseev<sup>1✉</sup>, Nikolay K. Kuznetsov<sup>2</sup>

© Елисеев А. В., Кузнецов Н. К., 2022

<sup>1</sup>Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia,

<sup>1,2</sup>Irkutsk National Research Technical University, Irkutsk, Russia

<sup>1</sup>eavsh@ya.ru, <http://orcid.org/0000-0003-0222-2507>

<sup>2</sup>knik@istu.edu, <http://orcid.org/0000-0002-3083-0182>

**Abstract.** We present a system approach to evaluating dynamic forms of interactions between elements of mechanical oscillatory systems, which can be applied as design diagrams of engineering objects used for transport or technology purposes. The approach of structural mathematical modelling was used, where a mechanical oscillatory system (with the finite number of freedom degrees) is compared to the block diagram of a dynamically equivalent automatic control system. The research object was represented by a family of mechanical oscillatory systems with the finite number of freedom degrees under the action of connected force harmonic disturbances. The main research focus was on a set of dynamic states of an engineering object, which are caused by the application of common-phase external force disturbances at various frequencies and characterised by a connection coefficient. For a family of chain mechanical oscillatory systems with two degrees of freedom, a method for interpreting a set of dynamic states in the form of oriented graphs was developed. A method for constructing a population graph of dynamic states based on the frequency response of system transfer functions was developed. Within the framework of the developed interpretation, the graphs of dynamic states can be considered as peculiar invariants that persist on sets of mechanical oscillatory system parameters. Using the methodology of structural mathematical modelling, a concept of dynamic invariants was developed, according to which the totality of dynamic invariants can be used to provide a general evaluation of the variety of dynamic states and forms of dynamic interactions between the elements of mechanical oscillatory systems. The proposed concept of dynamic invariants extends the methodology of structural mathematical modelling in relation to the problems of system analysis for ensuring the safety of engineering objects for transport and technology purposes under the conditions of connected vibrational loading.

**Keywords:** mechanical oscillatory systems, structural mathematical modeling, modes of dynamic vibration damping, dynamic forms of interactions, dynamic invariants

**For citation:** Eliseev A. V., Kuznetsov N. K. A technology of structural mathematical modelling for engineering objects under vibrational loading: Interaction forms and dynamic invariants. *iPolytech Journal*. 2022;26(3):368-385. (In Russ.). <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2022-3-368-385>.

## ВВЕДЕНИЕ

Вопросам безопасности работы технических объектов уделяется значительное внимание [1–3]. Требования к динамическому качеству функционирования узлов технических объектов, реализация режимов динамического гашения колебаний, необходимость настройки вибрационных полей технологических машин, особенности управления динамическими эффектами в целях повышения производительности технологических процессов определяют внимание к развитию методологической базы для решения широкого круга задач динамики технических объектов, находящихся в условиях вибрационных нагрузений [4–9].

Методологической основой решения широкого круга задач динамики с расчетными схемами в виде механических колебательных систем служат методы структурного математического моделирования [10]. В рамках структурного математического моделирования механические колебательные системы сопоставляются со структурными схемами эквивалентных в динамическом отношении систем автоматического управления. Для

оценки, контроля и реализации особенностей динамических взаимодействий элементов механических колебательных систем в условиях вибрационных нагрузений используется понятие о динамической податливости, представляющее собой передаточное отношение, построенное на основе структурной схемы механической колебательной системы.

Методы структурного математического моделирования получили широкое распространение в решении задач вибрационной защиты и виброизоляции [11–14]. Структурное математическое моделирование нашло свое применение к решению ряда частных задач, связанных с оценкой динамических особенностей сочленений [15], дополнительных связей [16], связей, обладающих неустойчивым характером [17–18].

Определенное развитие получила методология структурного математического моделирования в направлении решения задач оценки динамических состояний и форм взаимодействий элементов технических объектов транспортного и технологического назначения [19–21].

Вместе с тем методология оценки дина-

мических состояний и форм взаимодействий элементов механических колебательных систем, находящихся под воздействием внешних возмущений, недостаточно детализирована для учета условий, отображающих связность амплитуд внешних синфазных силовых возмущений.

Статья посвящена развитию представлений о динамических формах взаимодействий элементов механических колебательных систем с двумя степенями свободы, находящихся под воздействием связанных внешних возмущений силовой природы.

### МЕХАНИЧЕСКАЯ КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Рассматривается механическая колебательная система с двумя степенями свободы, образованная массоинерционными элементами  $m_1$ ,  $m_2$ , которые связаны между собой, и с опорными поверхностями с помощью упругих элементов с жесткостями  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  (рис. 1). Под воздействием внешних гармонических синфазных силовых возмущений  $Q_1$  и  $Q_2$  элементы  $m_1$ ,  $m_2$  совершают малые установившиеся колебания. В качестве обобщенных координат рассматриваются смещения  $y_1$ ,  $y_2$  массоинерционных элементов  $m_1$ ,  $m_2$  относительно положения статического равновесия.

На основе формализма Лагранжа с использованием функций потенциальной и кинетической энергий вида

$$\Pi = \frac{1}{2} k_1 y_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_2 - y_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 y_2^2, \quad (1)$$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_2^2 \quad (2)$$

строится система дифференциальных уравнений с учетом нулевых начальных условий:

$$m_1 \ddot{y}_1 + (k_1 + k_2) y_1 - k_2 y_2 = Q_1, \quad (3)$$

$$-k_2 y_1 + m_2 \ddot{y}_2 + (k_2 + k_3) y_2 = Q_2. \quad (4)$$

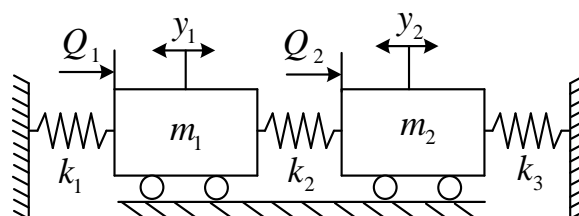


Рис. 1. Расчетная схема технического объекта  
Fig. 1. Loading diagram of a technical object

Система (3)–(4) дифференциальных уравнений под действием преобразования Лапласа [22] преобразуется к системе алгебраических уравнений относительно изображений  $\bar{y}_1$ ,  $\bar{y}_2$ , рассматриваемых как функции комплексного переменного  $p = j\omega$ ,  $j = \sqrt{-1}$ :

$$(m_1 p^2 + k_1 + k_2) \bar{y}_1 - k_2 \bar{y}_2 = \bar{Q}_1; \quad (5)$$

$$-k_2 \bar{y}_1 + (m_2 p^2 + k_2 + k_3) \bar{y}_2 = \bar{Q}_2. \quad (6)$$

На основе известных методов [10, 21] алгебраическую систему (5)–(6) сопоставляют со структурной схемой эквивалентной в динамическом отношении системой автоматического управления (рис. 2).

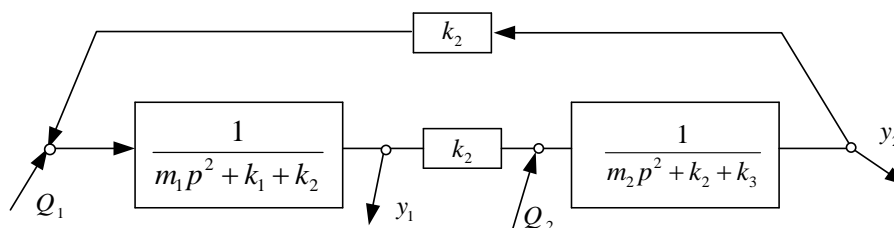


Рис. 2. Структурная схема механической колебательной системы на рис. 1  
Fig. 2. Block diagram of a mechanical oscillatory system in Fig. 1

Объектом, динамическое состояние которого оценивается, выбран массоинерционный элемент  $m_1$  с координатой  $y_1$ . При условии, что внешнее силовое воздействие  $Q_1$  приложено к массоинерционному элементу  $m_1$  ( $Q_1 \neq 0$ ,  $Q_2 = 0$ ), особенности динамических взаимодействий объекта могут быть выражены передаточной функцией системы в виде:

$$W_{11}(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{m_2 p^2 + k_2 + k_3}{A(p)}, \quad (7)$$

где

$$A(p) = (m_1 p^2 + k_1 + k_2) \times (m_2 p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2. \quad (8)$$

– характеристический многочлен.

Если объектом для оценки динамических свойств выбирается массоинерционный элемент  $m_2$  с координатой  $y_2$ , то особенности взаимодействий при условии ( $Q_1 = 0$ ,  $Q_2 \neq 0$ ) могут быть представлены передаточной функцией вида:

$$W_{22}(p) \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_2} = \frac{m_1 p^2 + k_1 + k_2}{A(p)}. \quad (9)$$

После замены  $p = j\omega$  передаточная функция системы (7) может быть представлена в виде амплитудно-частотной характеристики:

$$A_{11}(\omega) = \frac{-m_2 \omega^2 + k_2 + k_3}{(-m_1 \omega^2 + k_1 + k_2)(-m_2 \omega^2 + k_2 + k_3) - k_2^2}. \quad (10)$$

Амплитудно-частотная характеристика (10) отображает совокупность таких особенностей взаимодействий объекта, как динамическое гашение колебаний (рис. 3, т. 3) и резонанс (рис. 3, т. 1 и 2). Существенные особенности динамической податливости отображаются положительными ветвями графика амплитудно-частотной характеристики (рис. 3, линия 1, линия 3), отрицательными ветвями (рис. 3, линия 2, линия 4), резонансами (рис. 3, т. 1 и 2) и режимом обнуления амплитуды колебания (рис. 3, т. 3).

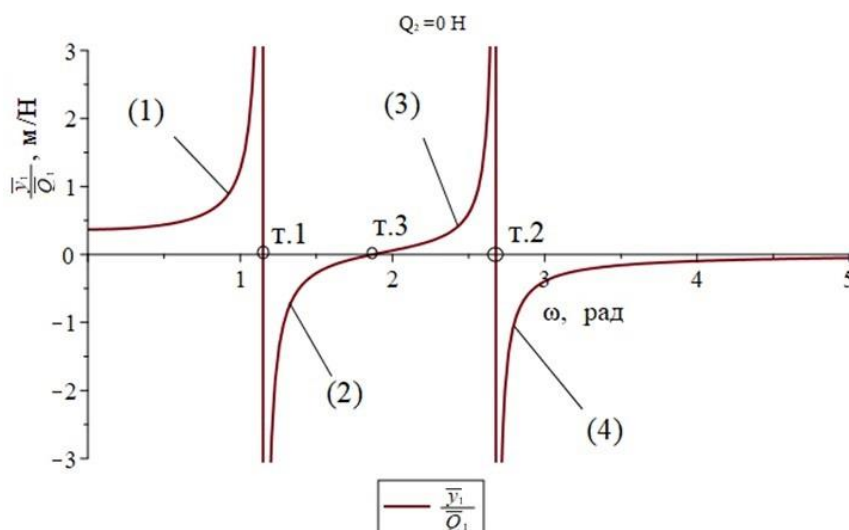


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика передаточной функции:  
 1, 3 – положительные ветви графика; 2, 4 – отрицательные ветви графика;  
 т. 1 – первая собственная частота  $\omega_1$ ; т. 2 – вторая собственная частота  $\omega_2$ ;  
 т. 3 – частота динамического гашения колебаний  $\omega_0$

Fig. 3. Amplitude-frequency characteristic of the transfer function: 1, 3 – positive legs of the graph; 2, 4 – negative legs of the graph; p. 1 – the first natural frequency  $\omega_1$ ; p. 2 – the second natural frequency  $\omega_2$ ; p. 3 – the frequency of dynamic damping of oscillations  $\omega_0$

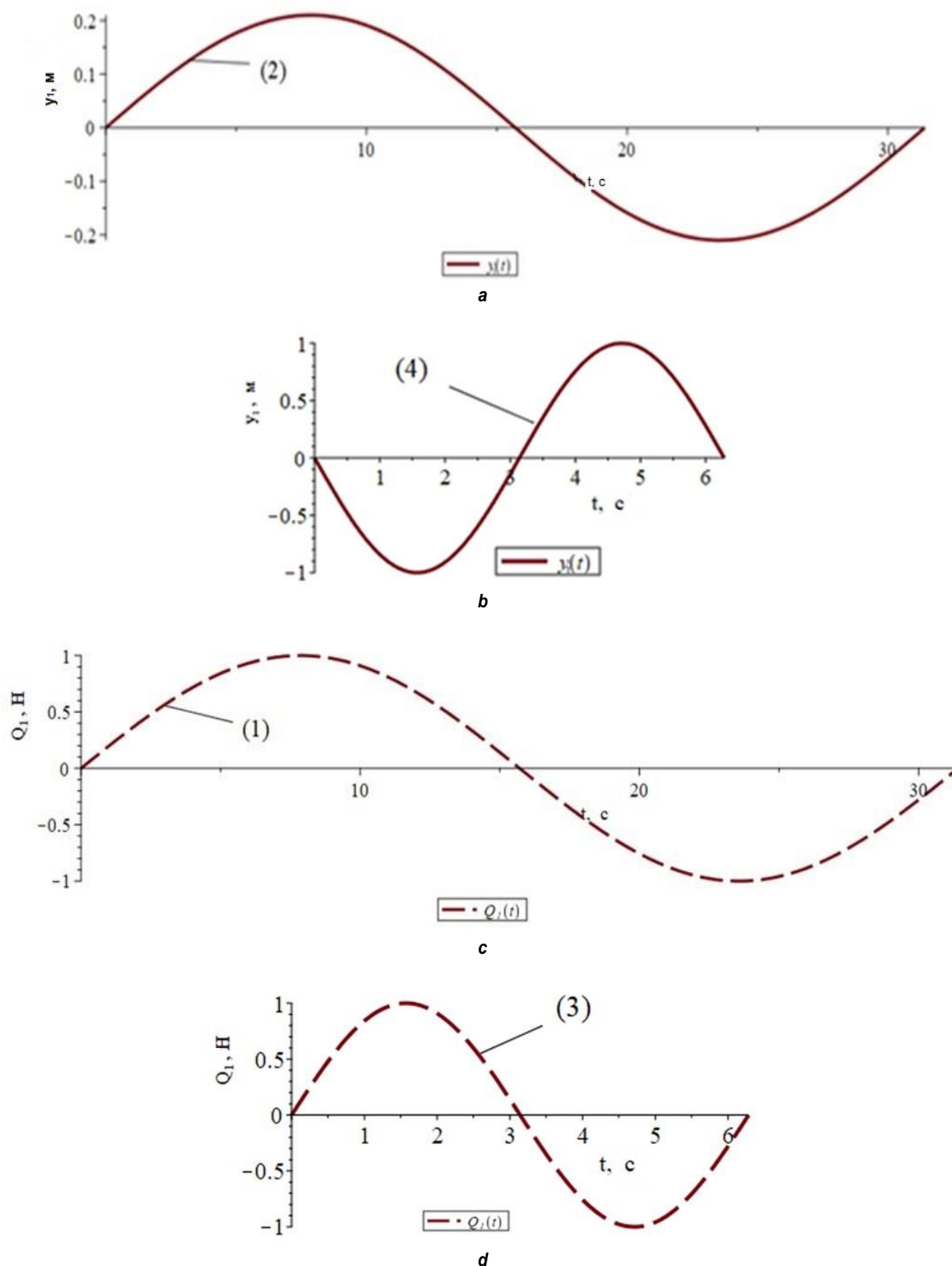


Рис. 4. Формы динамических взаимодействий объекта: а, с – «положительная» форма взаимодействия, 1 – график внешнего возмущения  $Q_1$  на частоте  $\omega = 1$  рад/с, 2 – график смещения координаты  $y_1$ ; б, д – «отрицательная» форма взаимодействия, 3 – график внешнего возмущения  $Q_1$  на частоте  $\omega = 0,2$  рад/с, 4 – график смещения координаты  $y_1$

Fig. 4. Forms of dynamic interactions of the object: a, c – 'positive' interaction form, 1 – graph of the external disturbance  $Q_1$  at the frequency of  $\omega = 1$  rad/s, 2 – graph of the  $y_1$  coordinate displacement; b, d – 'negative' interaction form, 3 – graph of the external disturbance  $Q_1$  at the frequency of  $\omega = 0.2$  rad/s, 4 – graph of the  $y_1$  coordinate displacement

Совокупности динамических особенностей, представленных амплитудно-частотной характеристикой (см. рис. 3), могут быть отображены с помощью ориентированных графов [23, 24].

Форма динамического взаимодействия объекта считается «положительной», если направленности движения элемента в виде синусоиды (рис. 4 а) совпадают с направленностью, взятой за базовую, изменения внешнего силового возмущения (рис. 4 с). Форма динамического взаимодействия объекта считается «отрицательной», если направленность его движения (рис. 4 б) противоположна направленности изменений внешнего силового возмущения  $Q_1$  (рис. 4 д).

На основе амплитудно-частотной характеристики  $\bar{y}_1/\bar{Q}_1(\omega)$  (см. рис. 3) совокупность динамических форм взаимодействий объекта, рассматриваемая в границах частотного диапазона  $(0, \omega_0)$ , может быть представлена графом (рис. 5)

$$G = \{V, E\}, \quad (11)$$

где множество вершин  $V = \{v_1, v_2\}$  отображает совокупность динамических форм взаимодействий объекта, а множество дуг  $E = \{e_1\}$  отображает динамические состояния.

В частности, вершина  $v_1 = \langle + \rangle$  отображает «положительную» форму взаимодействий объекта на интервале  $(0, \omega_1)$ , которая соответствует положительной ветви амплитудно-частотной характеристики на интервале  $(0, \omega_1)$  (см. рис. 3, линия 1); вершина  $v_2 = \langle - \rangle$  отображает «отрицательную» форму взаи-

модействий объекта на интервале  $(\omega_1, \omega_0)$ , где  $\omega_0$  – частота обнуления амплитуды колебания объекта (см. рис. 3, т. 3). Вершина  $v_2$  соответствует отрицательной ветви амплитудно-частотной характеристики на интервале  $(\omega_1, \omega_0)$  (см. рис. 3, линия 2). Дуга  $e_1 = \langle (v_1, v_2), \infty; \omega = \omega_1 \rangle$  отображает динамическое состояние резонанса на первой собственной частоте  $\omega_1$  (см. рис. 3, т. 1).

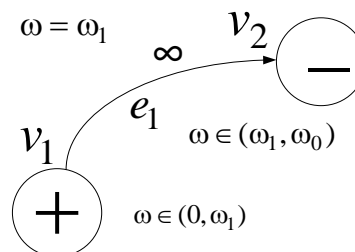


Рис. 5. Ориентированный граф  $G = \{V, E\}$  динамических форм взаимодействий объекта на интервале  $(0, \omega_0)$   
 Fig. 5. Oriented graph  $G = \{V, E\}$  of dynamic forms of object interactions on the interval  $(0, \omega_0)$

Особенности динамических форм взаимодействий объекта на фиксированном частотном интервале, представленные амплитудно-частотной характеристикой (см. рис. 3), могут быть отображены ориентированным графом (см. рис. 5) в ограниченном частотном диапазоне  $(0, \omega_0)$ .

Для оценки всей совокупности динамических форм взаимодействий объекта на основе амплитудно-частотной характеристики (см. рис. 3) может быть построен граф  $G = \{V, E\}$ , взаимно-однозначно отображающий с помощью вершин динамические формы в частотной области  $(0, \infty)$  (рис. 6 а).

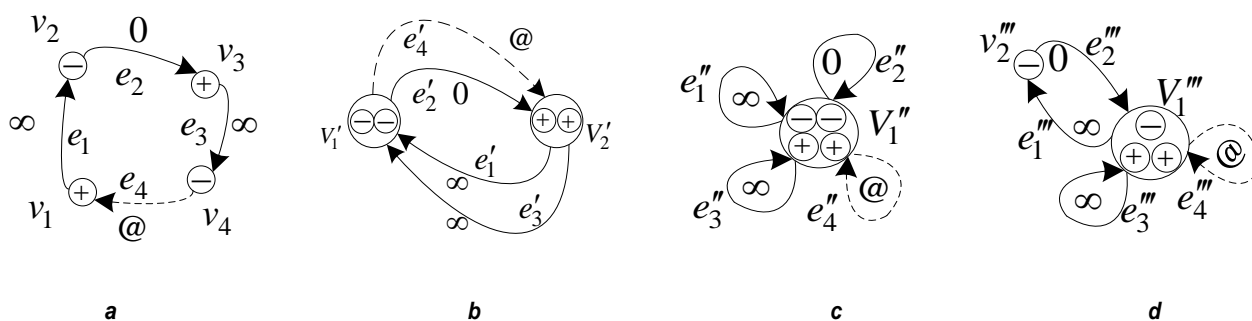


Рис. 6. Динамические формы взаимодействий объекта в виде ориентированных графов (@ – условное состояние «покоя-запирания»): а – граф  $G = \{V, E\}$ ; б – граф  $G' = \{V', E'\}$ ; в – граф  $G'' = \{V'', E''\}$ ; д – граф  $G''' = \{V''', E'''\}$   
 Fig. 6. Dynamic forms of object interactions in the form of oriented graphs (@ – conditional rest-shutoff state): а –  $G$  graph =  $\{V, E\}$ ; б –  $G'$  graph =  $\{V', E'\}$ ; в –  $G''$  graph =  $\{V'', E''\}$ ; д –  $G'''$  graph =  $\{V''', E'''\}$

Наравне с совокупностью динамических форм взаимодействий, распределенных по частотным интервалам, может быть рассмотрена совокупность динамических форм взаимодействий с обобщенной точки зрения, учитывающей только направленность движения без привязки к частотному интервалу. В рамках указанного обобщения для отображения фактически двух совокупностей динамических форм взаимодействий на основе графа  $G$  (рис. 6 а) может быть рассмотрен граф  $G'$  (рис. 6 б) путем отождествления между собой вершин одинаковой направленности. Знак «@» отображает условные, отождествленные между собой по критерию равенства нулю амплитуд колебаний, состояния обнуления или запираания амплитуды колебания по мере неограниченного роста частоты внешнего возмущения и состояние покоя системы, «предшествующее» приложению внешнего возмущения (условное состояние «покоя-запираания»).

В развитии подхода, связанного с обобщением представлений о динамических формах взаимодействий объектов механических колебательных систем, может быть рассмотрено понятие формы «как таковой» безотносительно ее направленности с целью определения наиболее обобщенных характеристик динамических форм. Для передачи представлений о динамических формах без учета их направленностей может быть построен граф  $G'' = \{V'', E''\}$  (см. рис. 6 с), в котором формы одинаковых и противоположных направленностей отождествлены между собой и представлены одной вершиной.

Свойства динамической формы взаимодействий, выбранной в качестве предмета оценки из совокупности всех динамических особенностей объекта, могут быть представлены графом, в котором соответствующая динамическая форма отображена вершиной, а все остальные динамические особенности представлены одной обобщенной вершиной, петлями и связующими дугами (см. рис. 6 д).

Перераспределение между массоинерционными элементами  $m_1$  и  $m_2$  двух зависимых силовых возмущений  $Q_1$  и  $Q_2$ , приложенных к соответствующим элементам, с учетом связи в виде

$$Q_2 = \gamma Q_1, \quad (12)$$

существенным образом может измениться в зависимости от коэффициента связности  $\gamma \in (-\infty, \infty)$  и совокупности динамических форм взаимодействий объекта механической колебательной системы.

Цель исследования заключается в разработке методологического подхода к оценке совокупности динамических форм взаимодействий массоинерционного элемента механической колебательной системы, находящейся под воздействием параметрического семейства внешних гармонических синфазных возмущений силовой природы.

## МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

**Математическая модель.** Рассматривается механическая колебательная система (см. рис. 1) с учетом зависимых внешних воздействий (12), характеризующихся коэффициентом связности  $\gamma$ . С учетом зависимости внешних возмущений (12) система уравнений (5) и (6) принимает вид:

$$(m_1 p^2 + k_1 + k_2) \bar{y}_1 - k_2 \bar{y}_2 = \bar{Q}_1; \quad (13)$$

$$-k_2 \bar{y}_1 + (m_2 p^2 + k_2 + k_3) \bar{y}_2 = \gamma \bar{Q}_1. \quad (14)$$

Соответствующая уравнениям (13)–(14) структурная схема (см. рис. 2) принимает вид (рис. 7), учитывающий в своем составе коэффициент связности  $\gamma$  внешних возмущений.

Структурная схема (см. рис. 7) может быть приведена к координате объекта, динамическое состояние которого оценивается (рис. 8).

На основе структурной схемы (см. рис. 8) для оценки динамических особенностей объекта системы с учетом коэффициента связности  $\gamma$  внешних воздействий может быть рассмотрена передаточная функция системы:

$$W_{11}(\gamma, p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{m_2 p^2 + k_2 + k_3 + \gamma k_2}{A(p)}. \quad (15)$$

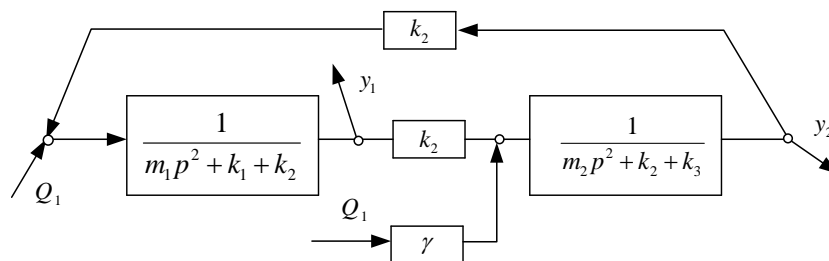


Рис. 7. Структурная схема (рис. 2) механической колебательной системы (см. рис. 1) с учетом коэффициента связности  $\gamma$

Fig. 7. Block diagram (Fig. 2) of a mechanical oscillatory system (see Fig. 1) taking into account the connectivity coefficient  $\gamma$

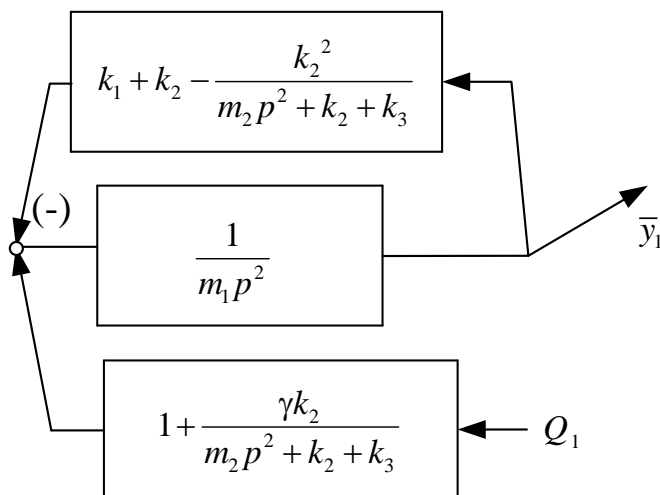


Рис. 8. Приведенная к объекту  $m_1$  структурная схема  
 Fig. 8. Block diagram reduced to the object  $m_1$

В физическом плане при замене  $p = j\omega$  где передаточное отношение (15) представляет собой податливость системы, в общем случае зависящей от частоты внешнего силового воздействия  $\omega$ . Множество податливостей для всевозможных частот  $\omega$  представляет собой совокупность динамических состояний и форм взаимодействий.

**Формы динамических взаимодействий объекта системы с учетом связности внешних силовых возмущений.** Для установления зависимости динамических форм взаимодействий от коэффициента связности внешних возмущений преобразуем характеристический многочлен (8) к виду, учитывающему явный вид парциальных частот  $n_1$ ,  $n_2$ , и частот  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  отдельных фрагментов системы:

$$A(p)\big|_{p=j\omega} = m_1 m_2 (\omega^4 - (n_1^2 + n_2^2)\omega^2 + n_1^2 n_2^2 - \Delta_1^2 \Delta_2^2), \quad (16)$$

$$n_1^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1}, \quad (17)$$

$$n_2^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2}, \quad (18)$$

$$\Delta_1^2 = \frac{k_2}{m_1}, \quad (19)$$

$$\Delta_2^2 = \frac{k_2}{m_2} \quad (20)$$

– характерные частоты системы.

В новых обозначениях  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  (17)–(20) собственные частоты системы  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  принимают следующий вид:

$$\omega_1^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2}\right)^2 + \Delta_1^2 \Delta_2^2}; \quad (21)$$

$$\omega_2^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2}\right)^2 + \Delta_1^2 \Delta_2^2}. \quad (22)$$

Передаточное отношение (15) в обозначениях (17)–(20) имеет вид:

$$W_{11}(\gamma, p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{\bar{y}_1}{Q_1} = \frac{-m_2(\omega^2 - (n_2^2 + \gamma\Delta_2^2))}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}, \quad (23)$$

где коэффициент связности внешних воздействий  $\gamma$  пробегает все возможные действительные значения, т.е.  $-\infty < \gamma < \infty$ . Выражение  $n_2^2 + \gamma\Delta_2^2$  для фиксированного коэффициента  $\gamma$  определяет функциональные особенности передаточного отношения (23), зависящего от

частоты внешнего возмущения  $\omega$ .

Для определения совокупностей динамических особенностей объекта механической колебательной системы необходимо рассмотреть возможные варианты внешнего возмущения, характеризующиеся интервалами и критическими значениями коэффициента связности  $\gamma$ .

1. Пусть для коэффициента связности  $\gamma$  выполнено условие:

$$\gamma < \gamma_0, \quad (24)$$

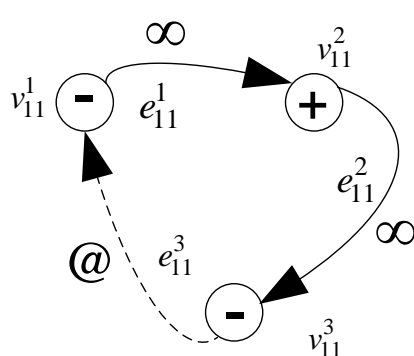
где  $\gamma_0 = -n_2^2/\Delta_2^2$  – критическое значение, зависящее от собственных характеристик системы (17)–(20). Существенные особенности передаточного отношения (23) определяются расположением собственных частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  системы относительно значения выражения  $\Delta_2^2\gamma + n_2^2$  (см. табл. 1).

Динамические особенности (см. табл. 1) могут быть представлены графом динамических состояний и динамических форм взаимодействий (рис. 9 а, б).

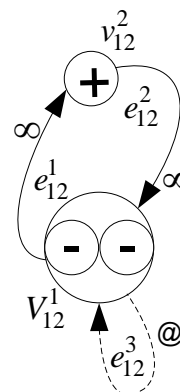
**Таблица 1.** Особенности передаточного отношения  $W_{11}(\gamma, p) \Big|_{p=j\omega}$  для  $\gamma < \gamma_0$

**Table 1.** Features of the transfer ratio  $W_{11}(\gamma, p) \Big|_{p=j\omega}$  for  $\gamma < \gamma_0$

Частоты $\omega$	[0]	(0, $\omega_1$ )	$[\omega_1]$	( $\omega_1$ , $\omega_2$ )	$[\omega_2]$	( $\omega_2$ , $\infty$ )
$W_{11}(\gamma, p) \Big _{p=j\omega}$	$W_{11}(\gamma, 0)$	–	$\infty$	+	$\infty$	–



a



b

**Рис. 9.** Совокупности динамических форм взаимодействий объекта механической колебательной системы:  
a – граф  $G_{11} = \{V_{11}, E_{11}\}$ ; b – граф  $G_{12} = \{V_{12}, E_{12}\}$

**Fig. 9.** Sets of dynamic forms of interactions of an object of a mechanical oscillatory system: a –  $G_{11}$  graph =  $\{V_{11}, E_{11}\}$ ; b –  $G_{12}$  graph =  $\{V_{12}, E_{12}\}$

С учетом условий связности внешних сил (24) существенной особенностью является отсутствие состояния обнуления амплитуды колебания объекта на какой-либо частоте внешнего возмущения.

2. Рассматривается критическое значение параметра связности:

$$\gamma = \gamma_0. \quad (25)$$

Передаточное отношение (15) при условии (25) принимает вид:

$$W_{11}(\gamma, p)|_{p=j\omega} = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{-m_2 \omega^2}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}. \quad (26)$$

Особенности динамических форм взаимодействий объекта с учетом условия (25) определяются собственными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  системы (табл. 2).

Совокупность динамических особенностей (см. табл. 2) может быть представлена графами  $G_{21}$ ,  $G_{22}$  (рис. 10 а, б).

Рассмотренная совокупность динамических особенностей может быть охарактеризована вырожденным состоянием обнуления амплитуды колебания объекта.

3. Рассматривается  $\gamma$  коэффициент связ-

ности, удовлетворяющий условиям:

$$\gamma_0 < \gamma < \gamma_1, \quad (27)$$

где критическое значение  $\gamma_1$  является решением уравнения:

$$n_2^2 + \gamma_1 \Delta_2^2 = \omega_1^2. \quad (28)$$

При условии (27) передаточное отношение (15) принимает следующий вид:

$$W_{11}(\gamma, p)|_{p=j\omega} = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{-m_2 (\omega^2 - \omega_0^2)}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}, \quad (29)$$

где выражение

$$\omega_0^2 = n_2^2 + \gamma \Delta_2^2 \quad (30)$$

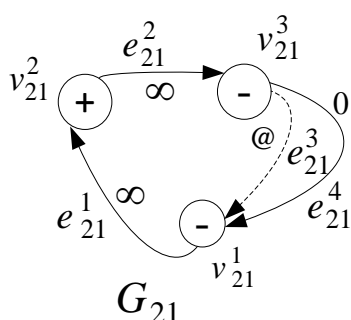
определяет частоту  $\omega_0$  обнуления амплитуды координаты  $y_1$  на интервале  $\omega_0 \in (0, \omega_1)$ .

Особенности динамических форм взаимодействий элемента  $m_1$  определяются частотой  $\omega_0$  обнуления амплитуды координаты  $y_1$  и собственными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  системы (табл. 3).

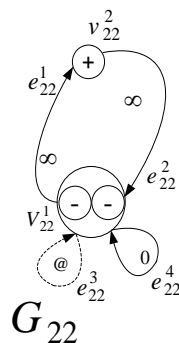
Таблица 2. Особенности передаточного отношения  $W_{11}(\gamma, p)|_{p=j\omega}$  для  $\gamma = \gamma_0$

Table 2. Features of the transfer ratio  $W_{11}(\gamma, p)|_{p=j\omega}$  for  $\gamma = \gamma_0$

Частоты $\omega$	[0]	(0, $\omega_1$ )	[ $\omega_1$ ]	( $\omega_1$ , $\omega_2$ )	[ $\omega_2$ ]	( $\omega_2$ , $\infty$ )
$W_{11}(\gamma, p) _{p=j\omega}$	0	–	$\infty$	+	$\infty$	–



а



б

Рис. 10. Совокупности динамических форм взаимодействий: а – граф  $G_{21} = \{V_{21}, E_{21}\}$ ; б – граф  $G_{22} = \{V_{22}, E_{22}\}$   
 Fig. 10. Sets of dynamic forms of interactions: а –  $G_{21} \text{ graph} = \{V_{21}, E_{21}\}$ ; б –  $G_{22} \text{ graph} = \{V_{22}, E_{22}\}$

**Таблица 3.** Особенности передаточного отношения  $W_{11}(\gamma, p)|_{p=j\omega}$  для  $\gamma_0 < \gamma < \gamma_1$ **Table 3.** Features of the transfer ratio  $W_{11}(\gamma, p)|_{p=j\omega}$  for  $\gamma_0 < \gamma < \gamma_1$ 

Частоты $\omega$	[0]	(0, $\omega_0$ )	$[\omega_0]$	( $\omega_0, \omega_1$ )	$[\omega_1]$	( $\omega_1, \omega_2$ )	$[\omega_2]$	( $\omega_2, \infty$ )
$W_{11}(\gamma, p) _{p=j\omega}$	$W_{11}(\gamma, 0)$	+	0	–	$\infty$	+	$\infty$	–

Совокупность динамических форм взаимодействий объекта может быть представлена графами  $G_{31}$  и  $G_{32}$  (рис. 11).

Приближение коэффициента связности  $\gamma$  к  $\gamma_1$  может интерпретироваться как сближение частоты  $\omega_0$  с частотой  $\omega_1$ .

4. Рассматривается критическое значение коэффициента связности

$$\gamma = \gamma_1, \quad (31)$$

которое определяется из равенства

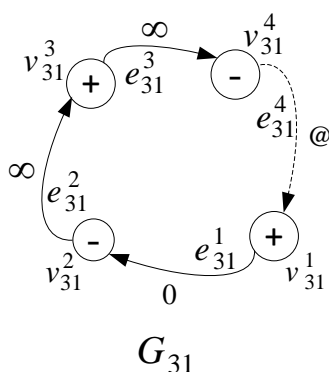
$$n_2^2 + \gamma_1 \Delta_2^2 = \omega_1^2. \quad (32)$$

При выполнении условия (31) передаточное отношение (15) принимает вид:

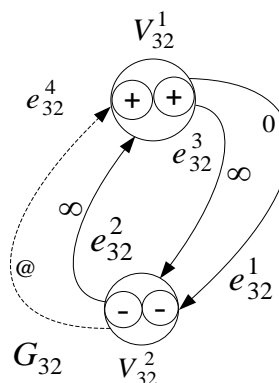
$$W_{11}(\gamma, p)|_{p=j\omega} = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{-m_2}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_2^2)}. \quad (33)$$

Особенности форм взаимодействий элемента  $m_1$  определяются совпадением частоты  $\omega_0$  с частотой  $\omega_1$  системы (табл. 4).

Совокупности динамических форм взаимодействий объекта механической колебательной системы могут быть представлены графом  $G_{41}$  (рис. 12).



a



b

**Рис. 11.** Совокупности динамических форм взаимодействий объекта для коэффициента связности  $\gamma_0 < \gamma < \gamma_1$ :

a – граф  $G_{31} = \{V_{31}, E_{31}\}$ ; b – граф  $G_{32} = \{V_{32}, E_{32}\}$

**Fig. 11.** Sets of dynamic forms of object interactions for the connectivity coefficient  $\gamma_0 < \gamma < \gamma_1$ :

a –  $G_{31}$  graph =  $\{V_{31}, E_{31}\}$ ; b –  $G_{32}$  graph =  $\{V_{32}, E_{32}\}$

**Таблица 4.** Особенности передаточного отношения  $W_{11}(\gamma, p)|_{p=j\omega}$  для  $\gamma = \gamma_1$ **Table 4.** Features of the transfer ratio  $W_{11}(\gamma, p)|_{p=j\omega}$  for  $\gamma = \gamma_1$ 

Частоты $\omega$	[0]	(0, $\omega_2$ )	$[\omega_2]$	( $\omega_2, \infty$ )
$W_{11}(\gamma, p) _{p=j\omega}$	$W_{11}(\gamma, 0)$	+	$\infty$	–

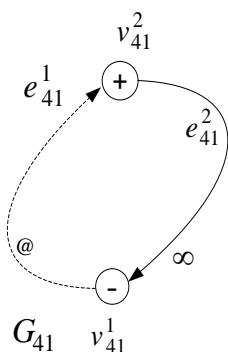


Рис. 12. Представление совокупности динамических особенностей в виде графа  $G_{41} = \{V_{41}, E_{41}\}$   
 Fig. 12. Representation of a set of dynamic features in the form of a graph  $G_{41} = \{V_{41}, E_{41}\}$

Особенностью рассмотренной совокупности динамических форм взаимодействий объекта является отсутствие динамического состояния обнуления амплитуды колебания объекта.

5. Рассматривается значение коэффициента связности  $\gamma$ , удовлетворяющее условию:

$$\gamma_1 < \gamma < \gamma_2, \quad (34)$$

где критические значения  $\gamma_1 < 0$  и  $\gamma_2 > 0$  являются решениями уравнений:

$$n_2^2 + \gamma_1 \Delta_2^2 = \omega_1^2; \quad (35)$$

$$n_2^2 + \gamma_2 \Delta_2^2 = \omega_2^2. \quad (36)$$

При условии (34) передаточное отношение (15) принимает вид:

$$W_{11}(\gamma, p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{\bar{y}_1}{Q_1} = \frac{-m_2(\omega^2 - \omega_0^2)}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}, \quad (37)$$

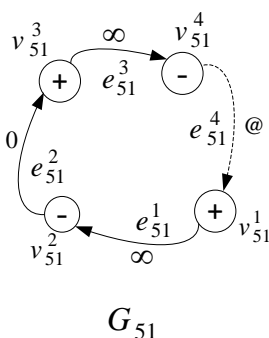
где выражение  $\omega_0^2 = n_2^2 + \gamma \Delta_2^2$ , зависящее от коэффициента связности  $\gamma$ , определяет значение  $\omega_0$  частоты обнуления координаты  $y_1$ . Особенности динамических форм взаимодействий элемента  $m_1$  определяются тем, что частота  $\omega_0$  обнуления амплитуды координаты  $y_1$  находится между собственными частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (табл. 5).

Соответствующие совокупности динамических состояний и форм динамических взаимодействий элементов системы могут быть отображены посредством графов  $G_{51}$ ,  $G_{52}$  (рис. 13 а, б).

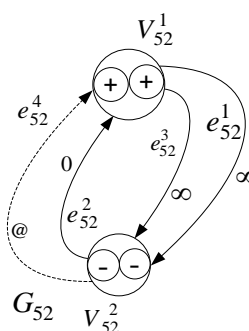
Таблица 5. Особенности передаточного отношения  $W_{11}(\gamma, p) \Big|_{p=j\omega}$  для  $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$

Table 5. Features of the transfer ratio  $W_{11}(\gamma, p) \Big|_{p=j\omega}$  for  $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$

Частоты $\omega$	[0]	(0, $\omega_1$ )	[ $\omega_1$ ]	( $\omega_1$ , $\omega_0$ )	[ $\omega_0$ ]	( $\omega_0$ , $\omega_2$ )	[ $\omega_2$ ]	( $\omega_2$ , $\infty$ )
$W_{11}(\gamma, p) \Big _{p=j\omega}$	$W_{11}(\gamma, 0)$	+	$\infty$	-	0	+	$\infty$	-



a



b

Рис. 13. Совокупности форм динамических взаимодействий: а – граф  $G_{51} = \{V_{51}, E_{51}\}$ ; б – граф  $G_{52} = \{V_{52}, E_{52}\}$   
 Fig. 13. Sets of forms of dynamic interactions: а –  $G_{51}$  graph =  $\{V_{51}, E_{51}\}$ ; б –  $G_{52}$  graph =  $\{V_{52}, E_{52}\}$

Представленные ориентированные графы отображают динамические особенности, для которых «переход» от «отрицательных» форм взаимодействий к «положительным» формам реализуется с помощью состояния обнуления амплитуды объекта, а «переход» от «положительных» форм к «отрицательным» реализуется с помощью состояния резонанса.

6. Рассматривается критическое значение

$$\gamma = \gamma_2 \quad (38)$$

коэффициента связности внешних возмущений, определенное из условий совпадения частоты обнуления  $\omega_0$  и второй собственной частоты  $\omega_2$ :

$$n_2^2 + \gamma_2 \Delta_2^2 = \omega_2^2. \quad (39)$$

Передающее соотношение (15) принимает вид:

$$W_{11}(\gamma, p) \Big|_{p=j\omega} = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \frac{-m_2}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2)}. \quad (40)$$

Соответствующие передаточному отношению (40) особенности динамических форм взаимодействий объекта определяются совпадением частоты  $\omega_0$  с частотой  $\omega_2$  (табл. 6).

Совокупность динамических форм взаимодействий (см. табл. 6) может быть отображена графами  $G_{61}$  и  $G_{62}$  с учетом вариантов обобщения динамических форм взаимодействий объекта (рис. 14).

Особенность рассматриваемой динамической совокупности заключается в отсутствии динамического состояния обнуления координаты объекта.

7. Рассматривается значение  $\gamma$  коэффициента связности внешних возмущений, удовлетворяющее условию:

$$\gamma_2 < \gamma, \quad (41)$$

где критическое значение  $\gamma_2$  определяется условием (39) совпадения частоты  $\omega_0$  обну-

ления координаты  $y_1$  со второй собственной частотой  $\omega_2$ .

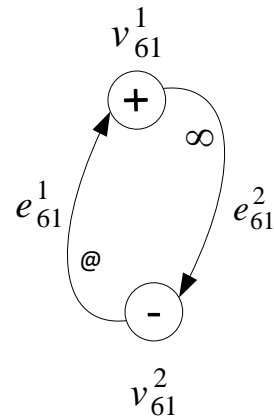


Рис. 14. Совокупность динамических особенностей в виде графа  $G_{61} = \{V_{61}, E_{61}\}$

Fig. 14. Set of the dynamic features in the form of a graph  $G_{61} = \{V_{61}, E_{61}\}$

Передающее соотношение (15) принимает вид:

$$\begin{aligned} W_{11}(\gamma, p) \Big|_{p=j\omega} &= \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_1} = \\ &= \frac{-m_2 (\omega^2 - \omega_0^2)}{m_1 m_2 (\omega^2 - \omega_1^2) (\omega^2 - \omega_2^2)}, \end{aligned} \quad (42)$$

где  $\omega_0^2 = n_2^2 + \gamma \Delta_2^2$  определяет частоту обнуления координаты  $y_1$ .

Соответствующие динамические формы взаимодействий объекта определяются тем, что частота  $\omega_0$  обнуления амплитуды координаты  $y_1$  превышает обе собственные частоты колебаний системы  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (табл. 7).

Совокупность динамических форм может быть охарактеризована с помощью графов  $G_{71}$  и  $G_{72}$  (рис. 15).

Совокупности динамических форм взаимодействий объекта с учетом коэффициента связности представляют собой своеобразные динамические инварианты, обладающие специфичной интерпретацией динамических состояний как «переходов» между формами динамических взаимодействий. Рассмотренные динамические совокупности могут обладать признаками устойчивости или неустойчивости.

Таблица 6. Особенности передаточного отношения  $W_{11}(\gamma, p)|_{p=j\omega}$  для  $\gamma = \gamma_2$

Table 6. Features of the transfer ratio  $W_{11}(\gamma, p)|_{p=j\omega}$  for  $\gamma = \gamma_2$

Частоты $\omega$	[0]	(0, $\omega_1$ )	[ $\omega_1$ ]	( $\omega_1, \infty$ )
$W_{11}(\gamma, p) _{p=j\omega}$	$W_{11}(\gamma, 0)$	+	$\infty$	–

Таблица 7. Особенности передаточного отношения  $W_{11}(\gamma, p)|_{p=j\omega}$  для  $\gamma_2 < \gamma$

Table 7. Features of the transfer ratio  $W_{11}(\gamma, p)|_{p=j\omega}$  for  $\gamma_2 < \gamma$

Частоты $\omega$	[0]	(0, $\omega_1$ )	[ $\omega_1$ ]	( $\omega_1, \omega_2$ )	[ $\omega_2$ ]	( $\omega_2, \omega_0$ )	[ $\omega_0$ ]	( $\omega_0, \infty$ )
$W_{11}(\gamma, p) _{p=j\omega}$	$W_{11}(\gamma, 0)$	+	$\infty$	–	$\infty$	+	0	–

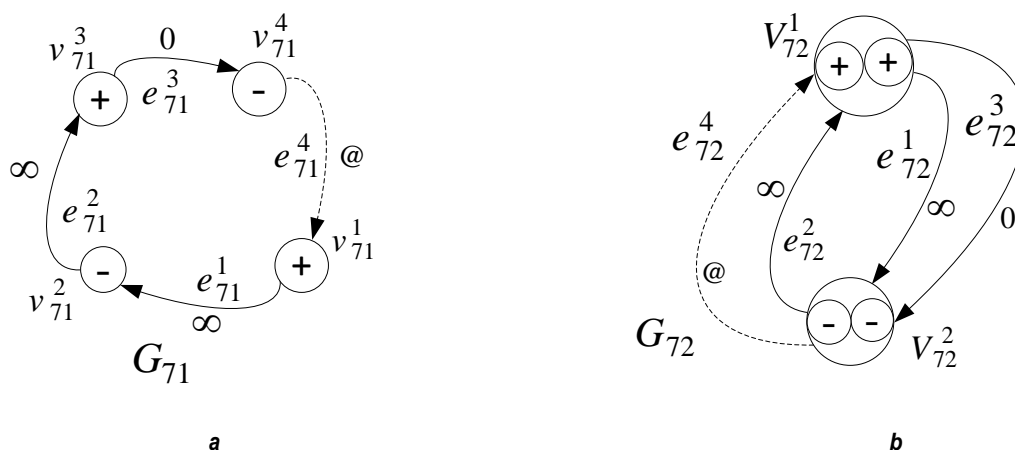


Рис. 15. Совокупность динамических форм взаимодействий объекта с координатой  $y_1$  для коэффициента связности  $\gamma$ : а – граф  $G_{71} = \{V_{71}, E_{71}\}$ ; б – граф  $G_{72} = \{V_{72}, E_{72}\}$

Fig. 15. Set of the dynamic forms of interactions of an object with the  $y_1$  coordinate for the connectivity coefficient  $\gamma$ : а –  $G_{71}$  graph =  $\{V_{71}, E_{71}\}$ , б –  $G_{72}$  graph =  $\{V_{72}, E_{72}\}$

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Совокупность динамических форм взаимодействий для фиксированного коэффициента связности может быть представлена в виде графов с учетом специфики отождествления форм взаимодействия. Выбор специфики отождествления динамических форм взаимодействий определяет характер детализации, требуемой для решения задачи.

Для определения существенных особенностей динамических форм взаимодействий объекта с учетом коэффициента связности внешних силовых возмущений графы динамических форм (см. рис. 9–15) могут быть приведены к обобщенному виду  $G_I$ – $G_{VII}$  (табл. 8), в котором формы динамических взаимодействий отождествлены между собой и

представлены единственной вершиной с множеством петель.

Совокупности динамических форм взаимодействий объекта, рассматриваемые как динамические инварианты, соответствующие множествам варьируемого параметра, могут обладать признаками устойчивости или неустойчивости. Дополнительно возможно развитие методологии в рамках рассмотрения динамических совокупностей механических колебательных систем, включающих в свой состав устройства для преобразования движения. Можно предположить, что предложенная методология обладает потенциалом использования для оценки динамических особенностей, связанных с учетом неустойчивых связей, обеспечивающих ненарушение контакта массоинерционных элемен-

тов механических колебательных систем, находящихся в условиях вибрационного нагружения силовой или кинематической природы. Аналогично возможно расширение разработанного подхода для учета сочленений в механических колебательных системах, находящихся в условиях вибрационного нагружения связанных силовых воздействий. Необходимо отметить, что предложенная методология может быть применена к оценке динамических особенностей рычажных свойств на основе графо-аналитической интерпретации амплитудно-частотных характеристик передаточных функций межпарциальных связей.

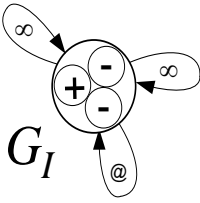
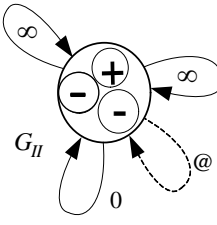
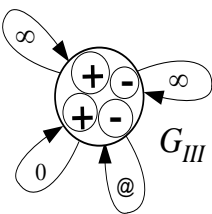
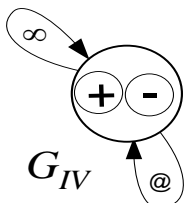
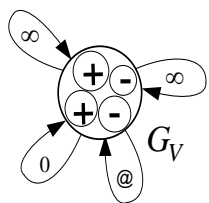
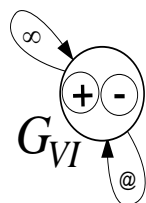
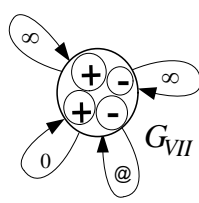
Вместе с тем открытыми вопросами, связанными с многообразием динамических инвариантов, соответствующих различным передаточным отношениям, являются вопросы, связанные с выбором объекта, динамическое состояние которого оценивается, и с выбором системы координат. Дополнительной детализации представлений требуют динами-

ческие инварианты, которые соответствуют предельным значениям рассматриваемых коэффициентов связности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развивается системный подход к оценке динамических форм взаимодействий элементов механических колебательных систем на основе представления динамических особенностей в виде ориентированных графов, отображающих положительные и отрицательные формы динамических взаимодействий в виде вершин, а динамические состояния – в виде направленных дуг. Показана принципиальная возможность графо-аналитической интерпретации амплитудно-частотных характеристик передаточных функций для семейства структурных схем механических колебательных систем, находящихся в условиях нагружения силовыми возмущениями, зависящими от так называемого коэффициента связности.

**Таблица 8.** Обобщенные представления о динамических формах взаимодействий  
**Table 8.** Generalized representations about the dynamic forms of interactions

№	I	II	III	
Условия	$\gamma < \gamma_0$	$\gamma = \gamma_0$	$\gamma_0 < \gamma < \gamma_1$	
Динамические инварианты				
№	IV	V	VI	VII
Условия	$\gamma = \gamma_1$	$\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$	$\gamma = \gamma_2$	$\gamma_2 < \gamma$
Динамические инварианты				

Показано, что многообразие форм динамических взаимодействий механических колебательных систем с учетом коэффициента связности может быть представлено конечным набором графов, рассматриваемых в качестве своеобразных инвариантов, отображающих существенные динамические особенности в виде совокупности положительных и отрицательных динамических форм и состояний, в общем случае представляющих собой резонанс и состояния обнуления ам-

плитуд колебаний объекта оценки.

Таким образом, создана методологическая база технологии структурного математического моделирования в приложении к механическим колебательным системам, используемым в качестве расчетных схем в задачах системного анализа обеспечения безопасности работы технических объектов транспортного и технологического назначения, находящихся в условиях вибрационного нагружения.

#### Список источников

1. Махутов Н. А. Безопасность и риски: системные исследования и разработки. Новосибирск: Изд-во «Наука», 2017. 724 с.
2. Лапидус Б. М. О формировании актуальных направлений фундаментальных научных исследований в интересах опережающего развития ОАО «РЖД» // Железнодорожный транспорт. 2019. № 6. С. 26–30.
3. Стилсавский А. Б., Цыгичко В. Н. Формальная постановка задачи обеспечения безопасности транспортного комплекса // Труды Института системного анализа Российской академии наук. 2009. № 41. С. 52–73.
4. De Silva C. W. Fundamentals and practice. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press, 2000. 957 p.
5. Harris C. M., Crede C. E. Shock and vibration handbook. New York: McGraw – Hill Book Co, 2002. 1457 p.
6. Iwnicki S. Handbook of railway vehicle dynamics. Boca Raton: CRC Press, 2006. 552 p.
7. Banakh L. Ya., Kempner M. L. Vibrations of mechanical systems with regular structure. Heidelberg, Dordrecht, London, New York: Springer, 2010. 262 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-03126-7>.
8. Ден-Гартог Д. П. Механические колебания / пер. с 4-го америк. изд. А. Н. Обморшева. М.: Изд-во «Физматгиз», 1960. 580 с.
9. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Изд-во «ГИФМЛ», 1961. 824 с.
10. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Теория колебаний в инженерном деле. М.: Изд-во «Машиностроение», 1985. 472 с.
11. Банах Л. Я. Колебания механических систем с самоподобной структурой // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4. С. 52–53.
12. Eliseev S. V., Eliseev A. V. Theory of oscillations. Structural mathematical modeling in problems of dynamics of technical objects // Studies in Systems, Decision and Control. Vol. 252. Cham: Springer, 2020, 521 p.
13. Коловский М. З. Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Изд-во «Наука», 1976. 320 с.
14. Елисеев С. В., Резник Ю. Н., Хоменко А. П., Засядко А. А. Динамический синтез в обобщенных задачах виброзащиты и виброизоляции технических объектов: монография. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2008. 523 с.
15. Хоменко А. П., Елисеев С. В., Ермошенко Ю. В. Системный анализ и математическое моделирование в мехатронике виброзащитных систем. Иркутск: Изд-во ИРГУПС, 2012. 288 с.
16. Karnovsky I. A., Lebed E. Theory of vibration protection // Engineering. Cham: Springer, 2016. 674 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-28020-2>.
17. Елисеев А. В. Особенности взаимодействия материальной частицы с вибрирующей поверхностью в зависимости от дополнительной силы с неудерживающей связью // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2013. № 3. С. 9–15.
18. Елисеев А. В. Особенности реализации режима кратного подбрасывания в модельной задаче с неудерживающей связью при наличии вязкого трения // Наука в центральной России. 2013. № 2S. С. 42–47.
19. Гуськов А. М., Пановко Г. Я., Шохин А. Е. Расчет стержневой пространственной системы виброизоляции твердого тела при транспортной вибрации // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. № 2. С. 17–24.
20. Елисеев А. В., Кузнецов Н. К., Московских А. О. Динамика машин. Системные представления, структурные схемы и связи элементов: монография. М.: Изд-во «Инновационное машиностроение», 2019. 381 с.
21. Елисеев С. В., Елисеев А. В., Большаков Р. С., Хоменко А. П. Методология системного анализа в задачах оценки, формирования и управления динамическим состоянием технологических и транспортных машин. Новосибирск: Изд-во «Наука», 2021. 679 с.
22. Лурье А. И. Операционное исчисление и применение в технических приложениях. М.: Изд-во «Наука», 1959. 368 с.
23. Елисеев А. В., Миронов А. С. Новые подходы к оценке режимов динамического гашения колебаний вибрационных машин транспортного и технологического назначения: графы динамических состояний и

форм взаимодействия элементов // Мехатроника, автоматика и робототехника. 2022. № 9. С. 23–29. <https://doi.org/10.26160/2541-8637-2022-9-23-39>.  
24. Елисеев А. В., Миронов А. С. Методологические подходы к оценке совокупности динамических состоя-

ний и форм взаимодействий элементов вибрационных машин транспортного и технологического назначения // Journal of Advanced Research in Technical Science. 2022. № 28. Р. 22–25. <https://doi.org/10.26160/2474-5901-2022-28-22-25>.

### References

1. Makhutov N. A. *Safety and risks: system research and development*. Novosibirsk: Nauka; 2017, 724 p. (In Russ.).
2. Lapidus B. M. On the formation of up-to-date areas of fundamental scientific research in the interests of the advanced development of JSC Russian Railways. *Zheleznodorozhnyi transport*. 2019;6:26-30. (In Russ.).
3. Stislavskij A. B., Cygichko V. N. Formal setting of the problem of transport complex safety provision. *Trudy Instituta sistemnogo analiza Rossijskoj akademii nauk*. 2009;41:52-73. (In Russ.).
4. De Silva C. W. *Fundamentals and practice*. Boca Raton, London, New York, Washington, D.C.: CRC Press; 2000, 957 p.
5. Harris C. M., Crede C. E. *Shock and vibration handbook*. New York: McGraw – Hill Book Co; 2002, 1457 p.
6. Iwnicki S. *Handbook of railway vehicle dynamics*. Boca Raton: CRC Press; 2006, 552 p.
7. Banakh L. Ya., Kempner M. L. *Vibrations of mechanical systems with regular structure*. Heidelberg, Dordrecht, London, New York: Springer; 2010, 262 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-03126-7>.
8. Den Hartog J. P. *Mechanical vibrations*, 1960. 580 p. (Russ. ed.: *Mekhanicheskie kolebaniya*. Moscow, Fizmatgiz; 1960, 580 p.)
9. Lur'e A. I. *Analytical mechanics*. Moscow: IGIFML; 1961, 824 p. (In Russ.).
10. Timoshenko S. P., Young D. H., Uiver U. *Vibration problems in engineering*. Moscow: Mashinostroenie, 1985, 472 p. (In Russ.).
11. Banakh L. Ya. Vibrations of mechanical systems with self-similar structure. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo = Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*. 2011;4:52-53. (In Russ.).
12. Eliseev S. V., Eliseev A. V. Theory of oscillations. Structural mathematical modeling in problems of dynamics of technical objects. In: *Studies in Systems, Decision and Control*. Vol. 252. Cham: Springer; 2020, 521 p.
13. Kolovskij M. Z. *Automatic control of vibration protection systems*. Moscow: Nauka; 1976, 320 p. (In Russ.).
14. Eliseev S. V., Reznik Yu. N., Khomenko A. P., Zasyadko A. A. *Dynamic synthesis in the generalized problems of vibration protection and vibration insulation of technical objects*. Irkutsk: Irkutsk State University; 2008, 523 p. (In Russ.).
15. Khomenko A. P., Eliseev S. V., Ermoshenko Yu. V. *System analysis and mathematical modeling in vibration protection system mechatronics*. Irkutsk: Irkutsk State University of Railway Engineering; 2012, 288 p. (In Russ.).
16. Karnovsky I. A., Lebed E. Theory of vibration protection. In: *Engineering*. Cham: Springer; 2016, 674 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-28020-2>.
17. Eliseev A. V. *Interaction features of the material particle and a vibrating surface depending on the additional force with a unilateral constraint*. *Mezhdunarodnyj zhurnal prikladnyh i fundamental'nyh issledovanij = International Journal of Applied and Basic Research*. 2013;3:9-15. (In Russ.).
18. Eliseev A. V. Realization features of multiple mode tossing in the model problem with "not holding" ties on the presence of viscous forces. *Nauka v central'noj Rossii = Science in the Central Russia*. 2013;2S:42-47. (In Russ.).
19. Gus'kov A. M., Panovko G. Ya., Shohin A. E. The calculation of the spatial vibration isolation system of a solid body under transport vibration. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*. 2012;2:17-24. (In Russ.).
20. Eliseev A. V., Kuznetsov N. K., Moskovskikh A. O. *Dynamics of machines. System concepts, structural diagrams and element relationships*. Moscow: Innovacionnoe mashinostroenie; 2019, 381 p. (In Russ.).
21. Eliseev S. V., Eliseev A. V., Bol'shakov R. S., Khomenko A. P. *Methodology of system analysis in the problems of assessment, formation and control of the dynamic state of technological and transport machines*. Novosibirsk: Nauka; 2021, 679 p. (In Russ.).
22. Lur'e A. I. *Operational calculus and application in engineering applications*. Moscow: Nauka; 1959, 368 p. (In Russ.).
23. Eliseev A. V., Mironov A. S. New approaches to the assessment of the modes of dynamic damping of vibrations of elements of vibrating machines for transport and technological purposes: graphs of dynamic states and forms of interactions. *Mekhatronika, avtomatika i robototekhnika*. 2022;9:23-29. <https://doi.org/10.26160/2541-8637-2022-9-23-39>.
24. Eliseev A. V., Mironov A. S. Methodological approaches to the assessment of the totality of dynamic states and forms of interactions of elements of vibrating machines for transport and technological purposes. *Journal of Advanced Research in Technical Science*. 2022;28:22-25. <https://doi.org/10.26160/2474-5901-2022-28-22-25>.

#### **ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ**

**Елисеев Андрей Владимирович**,  
кандидат технических наук,  
доцент кафедры математики,  
Иркутский государственный университет путей  
сообщения,  
664074, г. Иркутск, ул. Чернышевского, 15, Россия;  
доцент кафедры конструирования и стандартизации в  
машиностроении,  
Иркутский национальный исследовательский  
технический университет,  
664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83, Россия

**Кузнецов Николай Константинович**,  
доктор технических наук, профессор,  
заведующий кафедрой конструирования и  
стандартизации в машиностроении,  
Иркутский национальный исследовательский  
технический университет,  
664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 83, Россия

#### **Вклад авторов**

Все авторы сделали эквивалентный вклад в  
подготовку публикации.

#### **Конфликт интересов**

Авторы заявляют об отсутствии конфликта  
интересов.

*Все авторы прочитали и одобрили окончательный  
вариант рукописи.*

#### **Информация о статье**

Статья поступила в редакцию 23.03.2022; одобрена  
после рецензирования 15.06.2022; принята к  
публикации 06.09.2022.

#### **INFORMATION ABOUT THE AUTHORS**

**Andrey V. Eliseev**,  
Cand. Sci. (Eng.),  
Associate Professor of the Department of Mathematics,  
Irkutsk State Transport University,  
15, Chernyshevsky St., Irkutsk 664074, Russia  
Irkutsk National Research Technical University,  
83, Lermontov St., Irkutsk 664074, Russia

**Nikolay K. Kuznetsov**,  
Dr. Sci. (Eng.), Professor,  
Head of the Department of Design and Standardization in  
Mechanical Engineering,  
Irkutsk National Research Technical University,  
83, Lermontov St., Irkutsk 664074, Russia

#### **Contribution of the authors**

The authors contributed equally to the preparation of the  
article.

#### **Conflict of interests**

The authors declare no conflict of interests.

*The final manuscript has been read and approved by all  
the co-authors.*

#### **Information about the article**

The article was submitted 23.03.2022; approved after  
reviewing 15.06.2022; accepted for publication  
06.09.2022.