



## Аналитический метод решения задачи потокораспределения тепловой сети

© С.В. Якшин

*Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск, Россия*

**Резюме:** Целью исследования является разработка метода аналитического решения задачи потокораспределения шести-, одиннадцати- и двенадцатиконтурной тепловой сети; решение задачи оптимизации многоконтурной тепловой сети, включающей в себя выбор целевой функции и определение ряда варьируемых технических параметров. Для ускорения процесса оптимизации традиционно использовался метод декомпозиции графа тепловой сети, смысл декомпозиции заключается в разрезании графа сети в некоторых узлах для перехода многоконтурной схемы к разветвленной схеме в виде дерева. Оптимизация каждой разветвленной схемы проводилась методом динамического программирования, в результате чего получились новые значения варьируемых параметров на текущей итерации. Далее выполнили возврат к многоконтурной схеме, решили задачу потокораспределения и вычислили значение целевой функции. Итерационная сходимость метода декомпозиции математически не была доказана. Автором предложен метод расщепления графа, который позволяет исключить процедуру декомпозиции при оптимизации тепловой сети. Применены математическое моделирование гидравлической цепи, метод расщепления графа, аналитический метод решения алгебраического уравнения четвертой степени, в результате чего определена схема минимального элемента многоконтурной тепловой сети, показана возможность последовательного и параллельного соединения минимальных элементов, получены аналитические зависимости для задачи потокораспределения тепловой сети указанных схем. Предложенный метод аналитического решения задачи потокораспределения многоконтурной тепловой сети позволяет свести задачу расчета сложной схемы сети к расчету нескольких минимальных элементов, что существенно снижает объем вычислительной работы при моделировании гидравлической цепи. Приведенные примеры показывают, что погрешность расчетов не превышает 3%.

**Ключевые слова:** тепловая сеть, линеаризация уравнений, гидравлический расчет, многоконтурность, потокораспределение, минимальный элемент сети

**Для цитирования:** Якшин С.В. Аналитический метод решения задачи потокораспределения тепловой сети. *Вестник Иркутского государственного технического университета*. 2021. Т. 25. № 1. С. 80–96. <http://dx.doi.org/10.21285/1814-3520-2021-1-80-96>

## An analytical method for solving the problem of heat network load flow

Sergey V. Yakshin

*Melentiev Energy Systems Institute of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, Russia*

**Abstract:** The author aimed to develop an analytical solution to the problem of the load flow of a six-, eleven- and twelve-circuit heat network, as well as to solve the problem of optimisation of a multi-circuit heat network, including the choice of the objective function and the determination of a number of variable technical parameters. For accelerating the optimisation process, the method of decomposition of the heat network graph was used. Decomposition involves is cutting the network graph at some nodes for the transition of a multi-circuit scheme to a branched scheme in the form of a tree. Optimisation of each branched circuit was carried out by the dynamic programming method, as a result of which new values of the variable parameters were obtained at the current iteration. Next, the author returned to the multi-circuit scheme to solve the load flow problem and calculate the value of the objective function. The iterative convergence of the decomposition method was not mathematically proven. The author proposed a method for splitting the graph, which eliminates the decomposition procedure when optimising a heat network. The following methods were applied: mathematical modelling of the hydraulic circuit, graph splitting method and the analytical method for solving the algebraic equation of the fourth degree. The following results were achieved: a scheme of the minimum element of a multi-circuit heat network was determined, the possibility of series and parallel circuits of minimum elements was shown, and analytical dependencies for the problem of load flow of a heat network of these schemes were obtained. The proposed analytical solution of

the load flow problem for a multi-circuit heat network allows the problem of calculating a complex network to be reduced to the calculation of several minimum elements, which significantly reduces the amount of computational work when modelling a hydraulic circuit. The provided examples show that the calculation error does not exceed 3%.

**Keywords:** heat network, linearization of equations, hydraulic calculation, multi-circuit, flow load, minimal network element

**For citation:** Yakshin S.V. An analytical method for solving the problem of heat network load flow. *Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Proceedings of Irkutsk State Technical University*. 2021;25(1):80–96. (In Russ.) <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2021-1-80-96>

## ВВЕДЕНИЕ

В общем виде математическая модель движения жидкости состоит из системы дифференциальных уравнений, описывающей нестационарное турбулентное движение вязкой сжимаемой жидкости или газа в различных условиях окружающей среды. Однако для расчетов гидравлических трубопроводных систем в энергетике и коммунальном хозяйстве требуется быстрое получение интегральных расходов и перепадов давлений на всех ветвях системы. В связи с этим стационарные задачи сетевой гидравлики достаточно хорошо изучены.

В научной литературе известны относительно простые методы последовательных приближений для расчета потокораспределения в многоконтурных гидравлических сетях [1–5]. Методы поконтурной увязки перепадов давлений и поузловой увязки расходов обычно связывают с именами В.Г. Лобачева, Х. Кросса, М.М. Андрияшева [6–8]. Эти методы предназначены для численного решения системы уравнений потокораспределения. Они являются аналогом известных электротехнических методов контурных токов и узловых напряжений для расчета электрических цепей в сочетании с методом Ньютона для решения систем нелинейных алгебраических уравнений. В связи с этим они получили название «метод контурных расходов» (МКР) и «метод узловых давлений» (МД). В задаче потокораспределения гидравлической сети можно выделить подзадачи: поиск коэффициента гидравлического трения [9–12] и поиск параметров регулирующих устройств [13–15]. Это говорит о том, что на каждой итерации решения задачи потокораспределения возникают внутренние итерационные процессы. В этом случае можно сказать, что одним из направлений исследований в зада-

че потокораспределения гидравлической цепи является снижение количества итерационных процессов. В данной работе для упрощения изложения рассматриваются схемы гидравлических цепей с установившимся режимом течения и квадратичной зависимостью между потерей давления и расхода [16, 17].

С целью аналитического рассмотрения задачи в работе [18] был предложен метод расщепления графа (МРГ), который позволил систему из восьми алгебраических уравнений свести к решению одного алгебраического уравнения с одной независимой переменной и получить аналитическое решение этого уравнения [19]. Следующий этап исследования – разработка методов аналитического решения задачи потокораспределения. В настоящей работе предлагается один из таких методов. На примерах многоконтурных схем показана работоспособность метода.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Математическая модель для задачи анализа тепловой сети с заданными гидравлическими сопротивлениями трубопроводной системы формулируется на основе двух законов Кирхгофа [1]:

$$Ax = Q, \quad (1)$$

$$BZXx = BP, \quad (2)$$

$$\underline{w} \leq w \leq \overline{w}, \quad (3)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  – вектор расходов на ветвях;  $Q = (Q_1, \dots, Q_n)^T$  – вектор расходов в узлах;  $A$  – матрица соединений для линейно независимых узлов;  $B$  – матрица контуров;  $Z$  – диагональная матрица гидравлических со-

противлений трубопроводов;  $X$  – диагональная матрица расходов на ветвях;  $P$  – вектор действующих давлений;  $w$  – вектор параметров схемы, имеющих ограничения;  $\underline{w}$  – вектор нижних ограничений;  $\overline{w}$  – вектор верхних ограничений.

### МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ ГРАФА

На рис. 1 а показана четырехконтурная схема сети, включающая восемь трубопроводов различного диаметра. На ветви № 1 расположена насосная станция с заданным перепадом давления [18].

Для данной схемы тепловой сети (рис. 1 а) искомыми величинами являются гидравлические расходы в трубопроводах. Допустим условное расщепление второй ветви на два параллельных трубопровода с сохранением перепадов давлений и суммарных расходов. В результате получим граф с расщепленной второй ветвью (рис. 1 б), где гидравлическое сопротивление  $z_2$  представлено в виде двух неизвестных гидравлических сопротивлений:  $s_1$  – ветвь 2–3<sup>1</sup> и  $s_2$  – ветвь 2–3<sup>2</sup>. При этом к системе (1)–(3) необходимо добавить два уравнения (4)–(5):

$$s_1 x_4^2 = s_2 x_3^2, \quad (4)$$

$$s_3 x_7^2 = s_4 x_8^2. \quad (5)$$

Полученную систему уравнений для рис. 1 б приводим к одному алгебраическому уравнению с одной неизвестной величиной  $s_1$ :

$$\frac{s_1 z_6}{s_5 \left[ z_6 + z_7 \left( 1 + \sqrt{\frac{z_6}{s_5}} \right)^2 \right]} = \frac{s_2 z_5}{s_6 \left[ z_5 + z_8 \left( 1 + \sqrt{\frac{z_5}{s_6}} \right)^2 \right]}, \quad (6)$$

новые обозначения  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$  гидравлических сопротивлений приведены в табл. 1.

В работе [19] трансцендентное уравнение (6) сведено к алгебраическому уравнению четвертой степени и получено его решение методом Феррари.

**Схема минимального элемента тепловой сети.** На схеме рис. 2 а представлен граф тепловой сети, который содержит 8 узлов и 12 ветвей. На ветви 1–2 расположен источник движущего давления. Условное расщепление ветви № 2 (рис. 2 б) позволяет увидеть аналогию с графом, представленным на рис. 1 б.

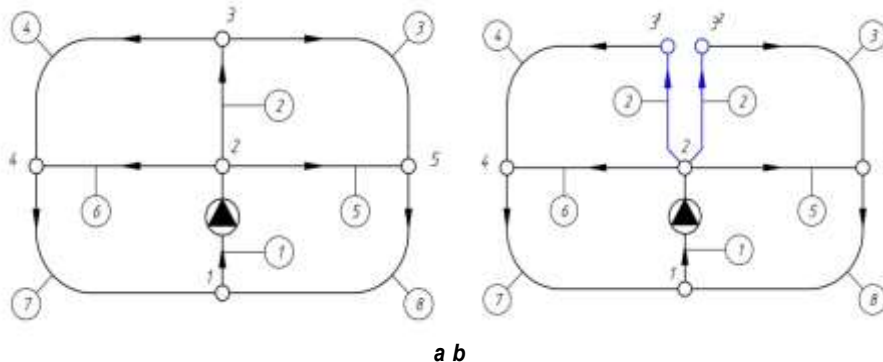


Рис. 1. Граф 4-контурной сети: а – замкнутая исходная схема сети; б – преобразование схемы с расщеплением второй ветви; ☼ – источник движущего давления; 1–5 – номера узлов (цифры в кружках – номера ветвей, стрелки на линиях – заданные направления потоков на ветвях)

Fig. 1. Graph of the four-circuit network: а – original closed circuit of a network; б – circuit transformation with the splitted second branch; ☼ – source of driving pressure; 1–5 – node numbers (numbers in circles stand for the numbers of branches, arrows on the lines indicate given directions of flows on the branches)

Таблица 1. Аналитические выражения для вектора расходов  
Table 1. Analytical expressions for the flow rate vector

Вектор расходов на ветвях	
обозначения переменных величин	схема рис. 1 а
$s_1$ – независимая переменная величина, гидравлическое сопротивление, рис. 1 б, ветвь 2–3 <sup>1</sup> .	$x_1 = \sqrt{\frac{P}{\frac{s_3 s_4}{(\sqrt{s_3} + \sqrt{s_4})^2} + z_1}}$
$s_2 = s_1 \frac{z_2}{(\sqrt{s_1} - \sqrt{z_2})^2}$	$x_2 = x_1 - x_5 - x_6$
$s_3 = (s_1 + z_4) \frac{z_6}{(\sqrt{s_1 + z_4} + \sqrt{z_6})^2} + z_7$	$x_3 = \frac{x_8}{\sqrt{\frac{s_6}{z_5} + 1}}$
$s_4 = (s_2 + z_3) \frac{z_5}{(\sqrt{s_2 + z_3} + \sqrt{z_5})^2} + z_8$	$x_4 = \frac{x_7}{\sqrt{\frac{s_5}{z_6} + 1}},$
$s_5 = s_1 + z_4$	$x_5 = x_8 - x_3$
$s_6 = s_2 + z_3$	$x_6 = x_7 - x_4$
–	$x_7 = \sqrt{\frac{P - z_1 x_1^2}{s_3}}$
–	$x_8 = \sqrt{\frac{P - z_1 x_1^2}{s_4}}$

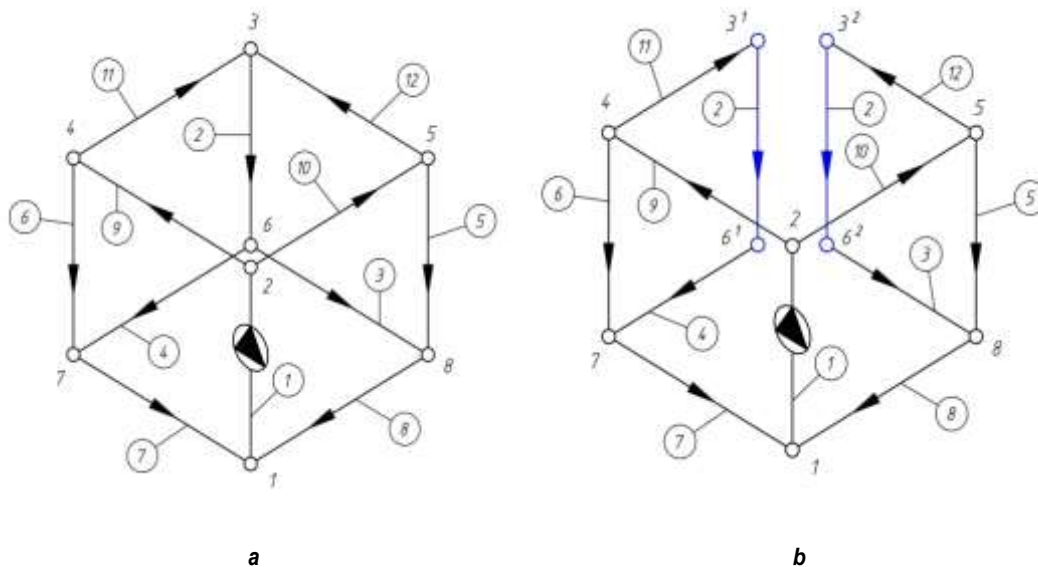


Рис. 2. Граф 6-контурной сети: а – замкнутая исходная схема сети; б – преобразование схемы с расщеплением второй ветви; ☼ – источник движущего давления; 1–8 – номера узлов (цифры в кружках – номера ветвей, стрелки на линиях – заданные направления потоков на ветвях)

Fig. 2. Graph of the six-circuit network: а – original closed circuit of a network; б – circuit transformation with the splitted second branch; ☼ – source of driving pressure; 1–8 – node numbers (numbers in circles stand for the numbers of branches, arrows on the lines indicate given directions of flows on the branches)



Для полного совпадения рис. 1 *b* и рис. 2 *b* необходимо найти суммарные гидравлические сопротивления для ветвей 1–2 (1), 2–4 (9), 2–5 (10) и ветвей 3–6 (2), 4–3 (11), 5–3 (12):

$$z_1^c = z_1 + z_9 \frac{z_{10}}{(\sqrt{z_9} + \sqrt{z_{10}})^2}; \quad (7)$$

$$z_2^c = z_2 + z_{11} \frac{z_{12}}{(\sqrt{z_{11}} + \sqrt{z_{12}})^2}. \quad (8)$$

В результате схему рис. 2 сводим к схеме рис. 1, где  $z_1 = z_1^c$  и  $z_2 = z_2^c$ . Решаем уравнение (6) и находим параметр расщепления  $s_1 = s_1^c$ , который связан с гидравлическим сопротивлением ветви 3<sup>1</sup>–6<sup>1</sup> ( $t_1$  аналог  $s_1$  рис. 1, табл. 1) выражением  $t_1 = s_1^c \cdot \frac{z_2}{z_2^c}$ . Расчет вектора расходов на ветвях  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  проводим с помощью табл. 2 (схема рис. 2).

**Таблица 2.** Аналитические выражения для вектора расходов  
**Table 2.** Analytical expressions for the flow rate vector

Вспомогательные величины		Вектор расходов на ветвях
аналог величины рис. 1	схема рис. 2	схема рис. 2
–	$t_1$ – независимая переменная величина, гидравлическое сопротивление, рис. 2 <i>b</i> , ветвь 3 <sup>1</sup> –6 <sup>1</sup>	$x_1 = \sqrt{\frac{P}{\frac{\psi_3 \psi_4}{(\sqrt{\psi_3} + \sqrt{\psi_4})^2} + z_1}}$
–	$t_2 = t_1 \frac{z_2}{(\sqrt{t_1} + \sqrt{z_2})^2}$	$x_2 = x_3 + x_4$
$s_1$ – независимая переменная величина, гидравлическое сопротивление, рис. 1 <i>b</i> , ветвь 2–3 <sup>1</sup> .	$\psi_1 = t_1 + z_{11}$	$x_3 = \frac{x_8}{\sqrt{\frac{\psi_6}{z_5} + 1}}$
$s_2 = s_1 \frac{z_2}{(\sqrt{s_1} + \sqrt{z_2})^2}$	$\psi_2 = t_2 + z_{12}$	$x_4 = \frac{x_7}{\sqrt{\frac{\psi_5}{z_6} + 1}},$
$s_3 = s_5 \frac{z_6}{(\sqrt{s_5} + \sqrt{z_6})^2} + z_7$	$\psi_3 = \psi_5 \frac{z_6}{(\sqrt{\psi_5} + \sqrt{z_6})^2} + z_7 + z_9$	$x_5 = x_8 - x_3$
$s_4 = s_6 \frac{z_5}{(\sqrt{s_6} + \sqrt{z_5})^2} + z_8$	$\psi_4 = \psi_6 \frac{z_5}{(\sqrt{\psi_6} + \sqrt{z_5})^2} + z_8 + z_{10}$	$x_6 = x_7 - x_4$
$s_5 = s_1 + z_4$	$\psi_5 = t_1 + z_4 + z_{11}$	$x_7 = \sqrt{\frac{P - z_1 x_1^2}{\psi_3}}$
$s_6 = s_2 + z_3$	$\psi_6 = t_2 + z_3 + z_{12}$	$x_8 = \sqrt{\frac{P - z_1 x_1^2}{\psi_4}}$
–	–	$x_9 = \sqrt{\frac{P - z_1 x_1^2 - z_6 x_6^2 - z_7 x_7^2}{z_9}}$
–	–	$x_{10} = x_1 - x_9$
–	–	$x_{11} = x_9 - x_6$
–	–	$x_{12} = x_{10} - x_5$

В табл. 3 представлен сравнительный расчет схемы минимального элемента тепловой сети различными методами (МКР и МРГ).

Максимальное отличие объемных расходов, полученных в результате двух расчетов, составило 0,9% (см. табл. 3, столбец № 6).

**Линеаризация уравнений потокораспределения.** Проведем линеаризацию уравнений (1)–(3) [1].

$$Ax^* = Q, \quad (9)$$

$$BZ^* x^* = BP^*, \quad (10)$$

$$x_i^* \geq 0, \quad (11)$$

где  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$  – вектор расходов на ветвях;  $Q = (Q_1, \dots, Q_n)^T$  – вектор расходов в узлах;  $A$  – матрица соединений для линейно независимых узлов;  $B$  – матрица контуров;  $Z^* = (\sqrt{z_1}, \dots, \sqrt{z_n})$  – диагональная матрица гидравлических сопротивлений трубопроводов,  $P^* = (\sqrt{P_1}, \dots, \sqrt{P_n})^T$  – вектор действующих давлений.

**Параллельное соединение минимальных элементов тепловой сети.** На схеме рис. 3 а представлен граф тепловой сети, который содержит 12 узлов и 20 ветвей. На

ветви 1–2 расположен насос постоянного перепада движущего давления.

В замкнутой схеме сети рис. 3 а проведем расщепление первой, второй, девятой и двадцатой ветвей. Полученная схема сети рис. 3 б имеет дополнительно восемь неизвестных гидравлических сопротивлений:  $k1_1$  – ветвь  $1^1-2^1$  и  $k1_2$  – ветвь  $1^2-2^2$ ,  $k2_1$  – ветвь  $2^1-5^1$  и  $k2_2$  – ветвь  $2^2-5^2$ ,  $k9_1$  – ветвь  $8^1-1^1$  и  $k9_2$  – ветвь  $8^2-1^2$ ,  $k20_1$  – ветвь  $5^1-8^1$  и  $k20_2$  – ветвь  $5^2-8^2$ . Параметры расщепления находим после решения линеаризованной системы уравнений (9)–(11).

Найдем гидравлические сопротивления  $k20_1$ ,  $k20_2$  и условные расходы  $x1_{20}^*$ ,  $x2_{20}^*$  для ветви 5–8 из системы уравнений (12)–(15):

$$k20_1 \cdot (x1_{20}^*)^2 = z_4 \cdot (x_4^*)^2 + z_{17} \cdot (x_{17}^*)^2 + z_{18} \cdot (x_{18}^*)^2. \quad (12)$$

$$k20_2 \cdot (x2_{20}^*)^2 = z_3 \cdot (x_3^*)^2 + z_{16} \cdot (x_{16}^*)^2 + z_{19} \cdot (x_{19}^*)^2. \quad (13)$$

$$x_{20}^* = x1_{20}^* + x2_{20}^*. \quad (14)$$

$$k20_2 = k20_1 \frac{z_{20}}{(\sqrt{k20_1} - \sqrt{z_{20}})^2}. \quad (15)$$

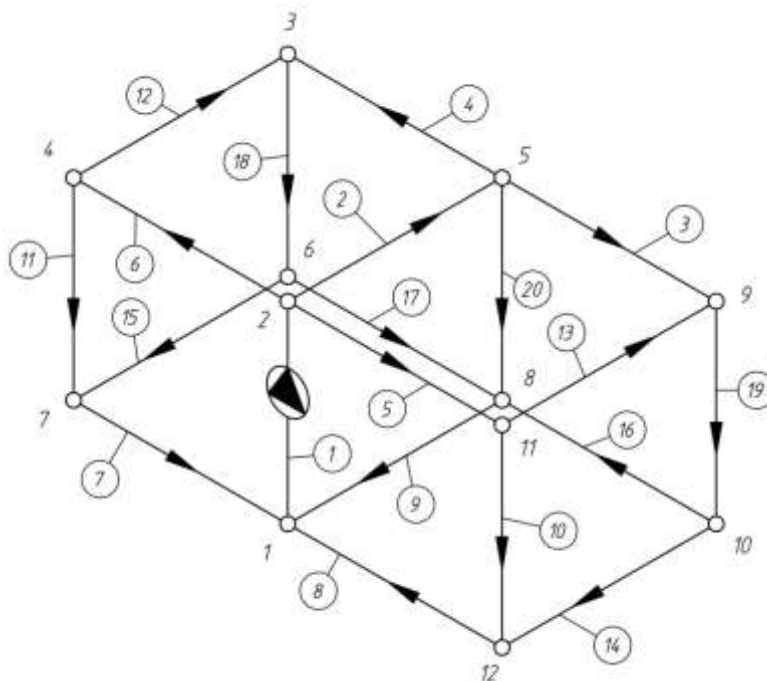
Таблица 3. Потокораспределение для схемы тепловой сети рис. 2

Table 3. Load flow for the heat network diagram in fig. 2

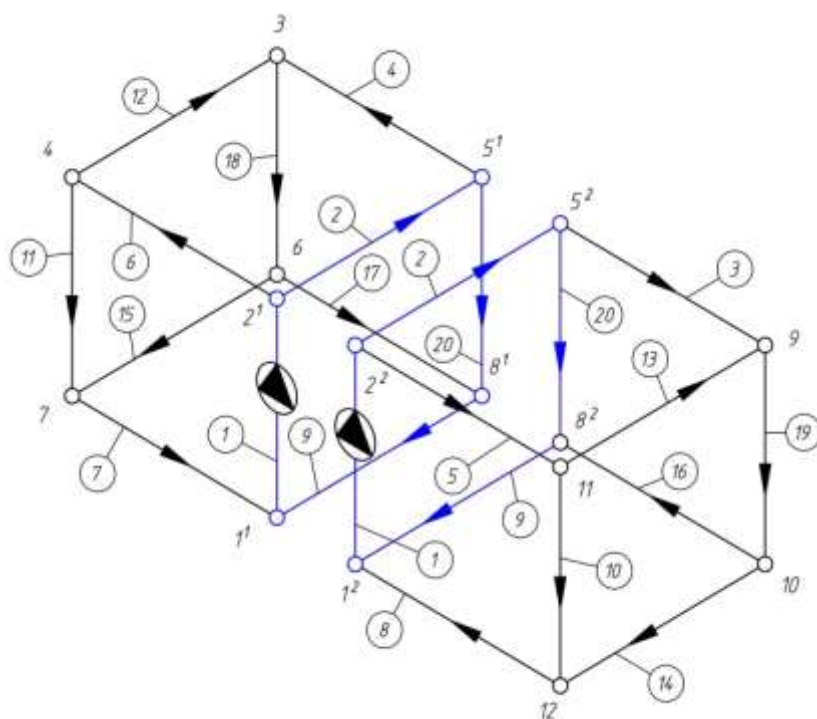
Ветвь	Диаметр ветви, м	Длина ветви, м	Объемный расход (метод контурных расходов), м <sup>3</sup> /с	Объемный расход (метод расщепления графа), м <sup>3</sup> /с	Погрешность расчетов, %
1–2	1,202	1000	1,902	1,902	$3 \cdot 10^{-3}$
3–6	0,514	1000	0,501	0,501	$-9 \cdot 10^{-2}$
6–8	0,414	2000	0,198	0,196	$9 \cdot 10^{-1}$
6–7	0,514	2000	0,303	0,305	$-7 \cdot 10^{-1}$
5–8	0,514	1000	0,713	0,713	$2 \cdot 10^{-2}$
4–7	0,514	1000	0,688	0,688	$5 \cdot 10^{-2}$
7–1	0,702	2000	0,991	0,993	$-2 \cdot 10^{-1}$
8–1	0,702	2000	0,911	0,909	$2 \cdot 10^{-1}$
2–4	0,9	1000	1,002	1,003	$-6 \cdot 10^{-3}$
2–5	0,802	1000	0,899	0,899	$1 \cdot 10^{-2}$
4–3	0,614	1000	0,314	0,315	$-1 \cdot 10^{-1}$
5–3	0,614	1000	0,187	0,187	$-1 \cdot 10^{-2}$

Примечание: движущее давление  $P = 400000$  Па.





a



b

Рис. 3. Граф 11-контурной сети: а – замкнутая исходная схема сети; б – преобразование схемы с расщеплением второй ветви; – источник движущего давления; 1–12 – номера узлов (цифры в кружках – номера ветвей, стрелки на линиях – заданные направления потоков на ветвях)  
Fig. 3. Graph of the eleven-circuit network: a – original closed circuit of a network; b – circuit transformation with the splitted second branch; – source of driving pressure; 1–12 – node numbers (numbers in the circles stand for the numbers of branches; arrows on the lines indicate given directions of flows on the branches)

Определяем диаметры  $d20_1^*$  и  $d20_2^*$ :

$$d20_1^* = \sqrt[21]{\Delta \cdot (0,88 \cdot L_{20} \cdot \frac{\rho}{\pi^2 \cdot k20_1})^4}, \quad (16)$$

$$d20_2^* = \sqrt[21]{\Delta \cdot (0,88 \cdot L_{20} \cdot \frac{\rho}{\pi^2 \cdot k20_2})^4}, \quad (17)$$

где  $\Delta$  – абсолютная шероховатость внутренней стенки трубы;  $L$  – длина трубы;  $\rho$  – плотность воды.

Параметры расщепления  $k1_1$ ,  $k1_2$ ,  $k2_1$ ,  $k2_2$ ,  $k9_1$ ,  $k9_2$  находим на основе полученных условных расходов  $x1_{20}^*$ ,  $x2_{20}^*$ :

$$k1_1 = z_1 \cdot (\frac{x_1^*}{x_4^* + x_6^* + x1_{20}^*})^2; \quad (18)$$

$$d1_1^* = \sqrt[21]{\Delta \cdot (0,88 \cdot L_1 \cdot \frac{\rho}{\pi^2 \cdot k1_1})^4}; \quad (19)$$

$$k1_2 = z_1 \cdot (\frac{x_1^*}{x_3^* + x_5^* + x2_{20}^*})^2; \quad (20)$$

$$d1_2^* = \sqrt[21]{\Delta \cdot (0,88 \cdot L_1 \cdot \frac{\rho}{\pi^2 \cdot k1_2})^4}; \quad (21)$$

$$k2_1 = z_2 \cdot (\frac{x_2^*}{x_4^* + x1_{20}^*})^2; \quad (22)$$

$$d2_1^* = \sqrt[21]{\Delta \cdot (0,88 \cdot L_2 \cdot \frac{\rho}{\pi^2 \cdot k2_1})^4}; \quad (23)$$

$$k2_2 = z_2 \cdot (\frac{x_2^*}{x_3^* + x2_{20}^*})^2; \quad (24)$$

$$d2_2^* = \sqrt[21]{\Delta \cdot (0,88 \cdot L_2 \cdot \frac{\rho}{\pi^2 \cdot k2_2})^4}; \quad (25)$$

$$k9_1 = z_9 \cdot (\frac{x_9^*}{x_{17}^* + x1_{20}^*})^2; \quad (26)$$

$$d9_1^* = \sqrt[21]{\Delta \cdot (0,88 \cdot L_9 \cdot \frac{\rho}{\pi^2 \cdot k9_1})^4}; \quad (27)$$

$$k9_2 = z_9 \cdot (\frac{x_9^*}{x_{16}^* + x2_{20}^*})^2; \quad (28)$$

$$d9_2^* = \sqrt[21]{\Delta \cdot (0,88 \cdot L_9 \cdot \frac{\rho}{\pi^2 \cdot k9_2})^4}. \quad (29)$$

В результате расщепленную схему рис. 3 *b* сводим к двум схемам рис. 2 *a*. В табл. 4 представлен пример расчета схемы параллельного соединения минимальных элементов тепловой сети.

Из табл. 4 видно, что максимальное отличие объемных расходов, полученных в результате двух расчетов, составило 1,43%, столбец № 6.

**Последовательное соединение минимальных элементов тепловой сети.** На схеме рис. 4 *a* представлен граф тепловой сети, который содержит 14 узлов и 23 ветви, его можно представить как соединение двух минимальных элементов рис. 4 *b* по ветви 3–6 (2). Первый минимальный элемент содержит сетевой насос, установленный на ветви 1–2 (1).

По аналогии с рис. 2 производим расщепление по второй и двадцать третьей ветвям. При этом система уравнений графа рис. 4 *a* получит дополнительно четыре неизвестных гидравлических сопротивления:  $k2_1$  – ветвь 3<sup>1</sup>–6<sup>1</sup> и  $k2_2$  – ветвь 3<sup>2</sup>–6<sup>2</sup>,  $k23_1$  – ветвь 9<sup>1</sup>–10<sup>1</sup> и  $k23_2$  – ветвь 9<sup>2</sup>–10<sup>2</sup>. Параметры расщепления находим в результате решения линеаризованной системы уравнений (9)–(11). Найдем суммарное гидравлическое сопротивление для ветвей: 3<sup>1</sup>–6<sup>1</sup> (2), 10–14 (14), 13–14 (16), 14–6 (17), 3–13 (19), 13–9 (21), 9<sup>1</sup>–10<sup>1</sup> (23):





Таблица 4. Потокораспределение для схемы тепловой сети рис. 3

Table 4. Load flow for the heat network diagram in fig. 3

Ветвь	Диаметр ветви, м	Длина ветви, м	Объемный расход (метод расщепления графа), м <sup>3</sup> /с	Объемный расход (метод контурных расходов), м <sup>3</sup> /с	Погрешность расчетов, %
1–2	100	1,202	2,760	2,761	0,02
2–5	2000	0,9	1,216	1,217	0,12
5–9	1000	0,309	0,075	0,077	1,43
5–3	1000	0,414	0,141	0,143	1,35
2–11	1000	0,702	0,781	0,782	0,11
2–4	1000	0,702	0,764	0,762	-0,24
7–1	1000	0,702	0,764	0,762	-0,24
12–1	1000	0,702	0,781	0,782	0,11
8–1	2000	0,9	1,216	1,217	0,12
11–12	1000	0,414	0,387	0,387	-0,01
4–7	1000	0,414	0,392	0,392	0,09
4–3	2000	0,614	0,372	0,370	-0,58
11–9	2000	0,614	0,394	0,394	0,23
10–12	2000	0,614	0,394	0,394	0,23
6–7	2000	0,614	0,372	0,370	-0,58
10–8	1000	0,309	0,075	0,077	1,43
6–8	1000	0,414	0,141	0,143	1,35
3–6	1000	0,514	0,513	0,513	-0,04
9–10	1000	0,514	0,469	0,471	0,43
5–8	1000	0,614	0,999	0,997	-0,15

Примечание: движущее давление  $P = 300000$  Па.

$$k23_1 = z_{23} \cdot \left( \frac{x_{23}^*}{x_{14}^*} \right)^2; \quad (30)$$

$$f_1(k23_1) = \frac{z_{16}(z_{14} + z_{21} + k23_1)}{(\sqrt{z_{16}} + \sqrt{z_{14} + z_{21} + k23_1})^2}; \quad (31)$$

$$f_2(k2_1, k23_1) = \frac{k2_1(z_{17} + z_{19} + f_1(k23_1))}{(\sqrt{k2_1} + \sqrt{z_{17} + z_{19} + f_1(k23_1)})^2}. \quad (32)$$

Найдем суммарное гидравлическое сопротивление для ветвей: 3<sup>2</sup>–6<sup>2</sup> (2), 10–12 (13), 11–12 (15), 12–6 (18), 3–11 (20), 11–9 (22), 9<sup>2</sup>–10<sup>2</sup> (23):

$$k23_2 = z_{23} \cdot \left( \frac{x_{23}^*}{x_{13}^*} \right)^2; \quad (33)$$

$$f_3(k23_2) = \frac{z_{15}(z_{13} + z_{22} + k23_2)}{(\sqrt{z_{15}} + \sqrt{z_{13} + z_{22} + k23_2})^2}; \quad (34)$$

$$f_4(k2_2, k23_2) = \frac{k2_2(z_{18} + z_{20} + f_3(k23_2))}{(\sqrt{k2_2} + \sqrt{z_{18} + z_{20} + f_3(k23_2)})^2}. \quad (35)$$

Определяем суммарное гидравлическое сопротивление  $z_2^s$  и соответствующий диаметр  $d_2^s$ :

$$z_2^s = \frac{f_2(k2_1, k23_1) \cdot f_4(k2_2, k23_2)}{(\sqrt{f_2(k2_1, k23_1)} + \sqrt{f_4(k2_2, k23_2)})^2}; \quad (36)$$

$$d_2^s = \sqrt[2]{\Delta \cdot (0,88 \cdot L_2 \cdot \frac{\rho}{\pi^2 \cdot z_2^s})^4}. \quad (37)$$

В результате схему рис. 4 а сводим к схеме рис. 2 б. Для перехода к схеме рис. 1 в качестве  $z_1$  используем  $z_1^c$  (38) и для  $z_2$  используем  $z_2^c$  (39):

$$z_1^c = z_1 + z_9 \frac{z_{10}}{(\sqrt{z_9} + \sqrt{z_{10}})^2}; \quad (38)$$

$$z_2^c = z_2^s + z_{11} \frac{z_{12}}{(\sqrt{z_{11}} + \sqrt{z_{12}})^2}. \quad (39)$$

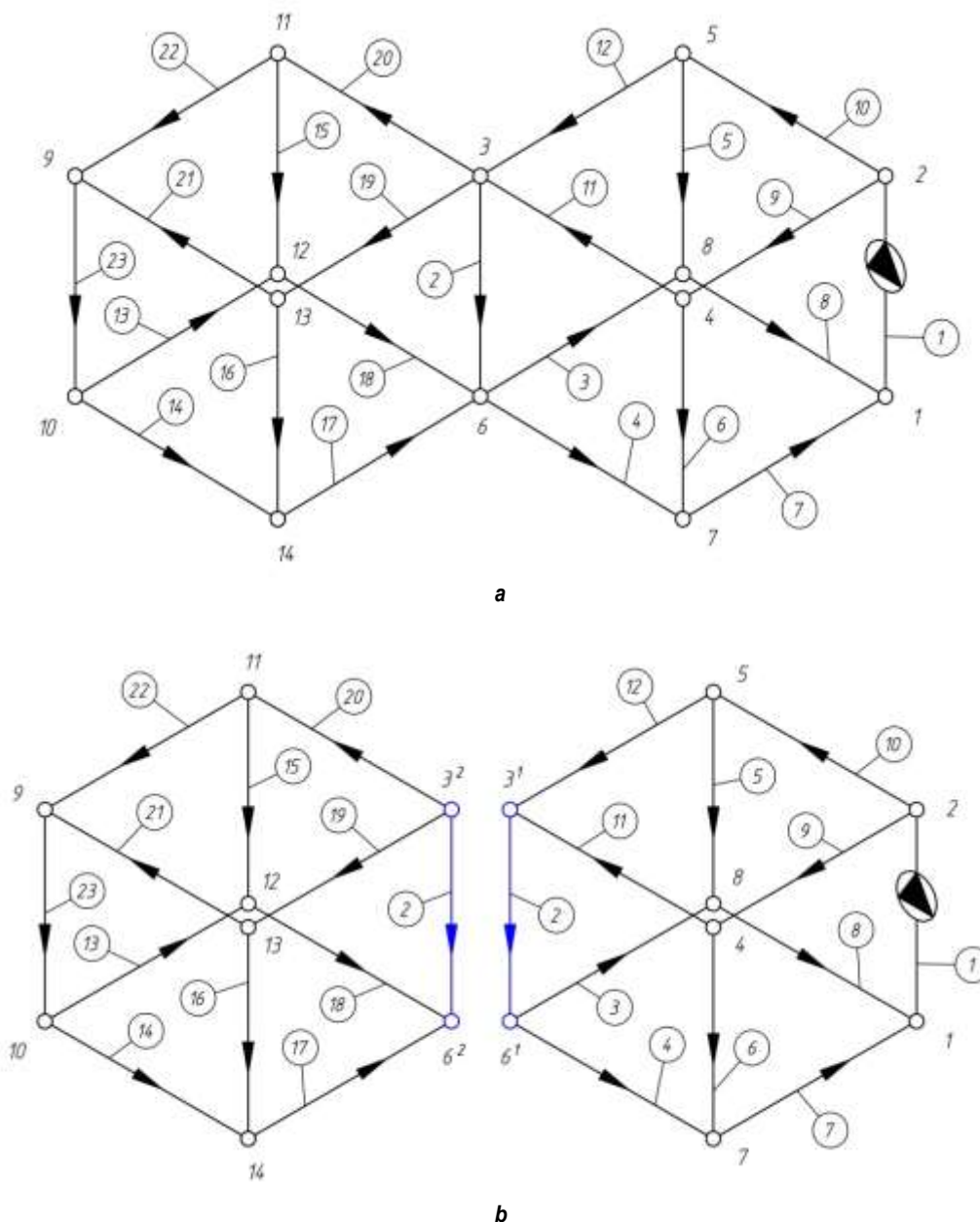


Рис. 4. Граф 12-контурной сети: – источник движущего давления; 1–14 – номера узлов (цифры в кружках – номера ветвей, стрелки на линиях – заданные направления потоков на ветвях)

Fig. 4. Graph of the twelve-circuit network: – source of driving pressure; 1–14 – node numbers (numbers in circles stand for the numbers of branches, arrows on the lines indicate given directions of flows on the branches)

Следующий шаг поиск расходов  $x_2$ ,  $x_{17}$ ,  $x_{18}$  и движущего давления для второго минимального элемента без источника движущего давления (рис. 4 б):

$$x_2 = \frac{x_2^s}{1 + \sqrt{\frac{z_2}{z_{17} + z_{19} + f_1(w_1)}} + \sqrt{\frac{z_2}{z_{18} + z_{20} + f_3(w_2)}}}; \quad (40)$$

$$x_{17} = x_2 \cdot \sqrt{\frac{z_2}{z_{17} + z_{19} + f_1(w_1)}}; \quad (41)$$

$$x_{18} = x_2 \cdot \sqrt{\frac{z_2}{z_{18} + z_{20} + f_3(w_2)}}; \quad (42)$$

$$P^0 = z_2 x_2^2 + z_2 (x_{17} + x_{18})^2. \quad (43)$$



В результате часть схемы рис. 4 *b* второй минимальный элемент, условно отделенный от первого элемента, сводим к схеме рис. 2 *a*. При этом соблюдаем соответствие параметров рис. 2 и рис. 4:  $P = P^0$ ,  $d_1^0 = d_2$ ,  $d_2^0 = d_{23}$ ,  $d_3^0 = d_{13}$ ,  $d_4^0 = d_{14}$ ,  $d_5^0 = d_{15}$ ,  $d_6^0 = d_{16}$ ,  $d_7^0 = d_{17}$ ,  $d_8^0 = d_{18}$ ,  $d_9^0 = d_{19}$ ,

$d_{10}^0 = d_{20}$ ,  $d_{11}^0 = d_{21}$ ,  $d_{12}^0 = d_{22}$  (индекс 0 соответствует схеме рис. 2). В табл. 6 представлен пример расчета схемы последовательного соединения минимальных элементов тепловой сети.

Из табл. 6 очевидно, что погрешность достигает 3,178% на ветви 13–9. На всех остальных ветвях она не превышает 3%.

**Таблица 5.** Аналитические выражения для вектора расходов  
**Table 5.** Analytical expressions for the flow rate vector

Вспомогательные величины		Вектор расходов на ветвях
аналог величины рис. 1	схема рис. 4	схема рис. 4
–	$t_1$ – независимая переменная величина, гидравлическое сопротивление, рис. 4 <i>a</i> , ветвь 3 <sup>1</sup> –6 <sup>1</sup> .	$x_1 = \sqrt{\frac{P}{\frac{\eta_3 \eta_4}{(\sqrt{\eta_3} + \sqrt{\eta_4})^2} + z_1^c}}$
–	$t_2 = t_1 \frac{z_2}{(\sqrt{t_1} - \sqrt{z_2})^2}$	$x_2^s = x_3 + x_4$
–	$w_1$ – независимая переменная величина, гидравлическое сопротивление, рис. 4 <i>a</i> , ветвь 9 <sup>1</sup> –10 <sup>1</sup> .	$x_3 = \frac{x_8}{\sqrt{\frac{\eta_6}{z_5} + 1}}$
–	$w_2 = w_1 \frac{z_{23}}{(\sqrt{w_1} - \sqrt{z_{23}})^2}$	$x_4 = \frac{x_7}{\sqrt{\frac{\eta_5}{z_6} + 1}}$
$s_1$ – независимая переменная величина, гидравлическое сопротивление, рис. 1 <i>b</i> , ветвь 2–3 <sup>1</sup> .	$\eta_1 = f_2(t_1, w_1) + z_{11}$	$x_5 = x_8 - x_3$
$s_2 = s_1 \frac{z_2}{(\sqrt{s_1} - \sqrt{z_2})^2}$	$\eta_2 = f_4(t_2, w_2) + z_{12}$	$x_6 = x_7 - x_4$
$s_3 = s_5 \frac{z_6}{(\sqrt{s_1} + \sqrt{z_4} + \sqrt{z_6})^2} + z_7$	$\eta_3 = \eta_5 \frac{z_6}{(\sqrt{\eta_5} + \sqrt{z_6})^2} + z_7 + z_9$	$x_7 = \sqrt{\frac{P - z_1^c x_1^2}{\eta_3}}$
$s_4 = s_6 \frac{z_5}{(\sqrt{s_2} + \sqrt{z_3} + \sqrt{z_5})^2} + z_8$	$\eta_4 = \eta_6 \frac{z_5}{(\sqrt{\eta_6} + \sqrt{z_5})^2} + z_8 + z_{10}$	$x_8 = \sqrt{\frac{P - z_1^c x_1^2}{\eta_4}}$
$s_5 = s_1 + z_4$	$\eta_5 = f_2(t_1, w_1) + z_4 + z_{11}$	$x_9 = \sqrt{\frac{P - z_1 x_1^2 - z_6 x_6^2 - z_7 x_7^2}{z_9}}$
$s_6 = s_2 + z_3$	$\eta_6 = f_4(t_2, w_2) + z_3 + z_{12}$	$x_{10} = x_1 - x_9$
–	–	$x_{11} = x_9 - x_6$
–	–	$x_{12} = x_{10} - x_5$

Таблица 6. Потокораспределение для схемы тепловой сети рис. 4  
Table 6. Load flow for the heat network diagram in fig. 4

Ветвь	Диаметр ветви, м	Длина ветви, м	Объемный расход (метод расщепления графа), м <sup>3</sup> /с	Объемный расход (метод контурных расходов), м <sup>3</sup> /с	Погрешность расчетов, %
1–2	1000	1,202	2,168	2,168	0,001
3–6	1000	0,514	0,259	0,259	-0,030
6–8	1000	0,414	0,347	0,348	0,283
6–7	2000	0,514	0,401	0,400	-0,275
5–8	1000	0,514	0,702	0,702	-0,023
4–7	1000	0,514	0,717	0,718	0,042
7–1	2000	0,702	1,119	1,118	-0,072
8–1	2000	0,702	1,049	1,050	0,078
2–4	2000	0,9	1,121	1,120	-0,092
2–5	2000	0,802	1,047	1,048	0,101
4–3	2000	0,614	0,404	0,402	-0,332
5–3	1000	0,614	0,345	0,346	0,353
10–12	2000	0,259	0,013	0,013	-1,017
10–14	2000	0,309	0,019	0,020	1,331
11–12	1000	0,514	0,230	0,229	-0,086
13–14	1000	0,514	0,228	0,228	0,013
14–6	1000	0,702	0,247	0,248	0,117
12–6	1000	0,702	0,242	0,242	-0,134
3–13	1000	0,9	0,244	0,244	0,221
3–11	1000	0,9	0,246	0,245	-0,235
13–9	2000	0,359	0,016	0,016	3,178
11–9	2000	0,359	0,016	0,016	-2,369
9–10	1000	0,259	0,032	0,032	0,410

Примечание: движущее давление  $P = 500000$  Па.

## АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В качестве примера для изучения погрешности рассмотрим шестиконтурную схему (рис. 5).

Плоский граф тепловой сети рис. 5 *b* в результате расщепления второй и девятой вет-

вей получает четыре неизвестных параметра расщепления:  $k_{2_1}$  – ветвь  $2^1-3^1$  и  $k_{2_2}$  – ветвь  $2^2-3^2$ ,  $k_{9_1}$  – ветвь  $3^1-6^1$  и  $k_{9_2}$  – ветвь  $3^2-6^2$ . Параметры расщепления  $k_{9_1}$  и  $k_{9_2}$  находим после решения линейаризованной системы уравнений (9)–(11).

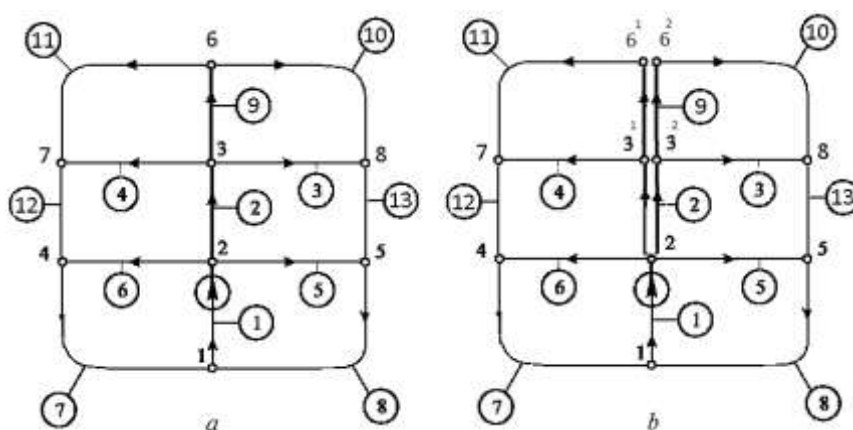


Рис. 5. Граф 6-контурной сети: *a* – замкнутая исходная схема сети; *b* – преобразование сети с расщеплением второй и девятой ветвей; ☉ – источник движущего давления; 1–8 – номера узлов (цифры в кружках – номера ветвей, стрелки на линиях – заданные направления потоков на ветвях)

Fig. 5. Graph of the six-circuit network: *a* – original closed circuit of a network; *b* – circuit transformation with the splitted second and ninth branches; ☉ – source of driving pressure; 1–8 – node numbers (the numbers in the circles stand for the numbers of branches, arrows on the lines indicate given directions of flows on the branches)



Определение  $k9_1 = z_9 \cdot (\frac{x_9}{x_{11}})^2$  дает возможность записать  $k9_1$  в развернутом виде (44), где видна явная зависимость  $k9_1$  от параметров двух замкнутых контуров, содержащих ветвь № 9:

$$k9_1 = z_9 \cdot (1 + \frac{x_3}{x_4} \cdot \sqrt{\frac{z_3 \cdot z_{11}}{z_4 \cdot z_{10}}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{z_9 \cdot x_9^2}{z_3 \cdot x_3^2}}{1 - \frac{z_9 \cdot x_9^2}{z_4 \cdot x_4^2}}})^2. \quad (44)$$

В случае линеаризации уравнений (1)–(3) получим для  $k9_1^*$  (45).

$$k9_1^* = z_9 \cdot (1 + \frac{x_3^*}{x_4^*} \cdot \sqrt{\frac{z_3 \cdot z_{11}}{z_4 \cdot z_{10}}} \cdot \frac{1 - \sqrt{\frac{z_9 \cdot x_9^*}{z_3 \cdot x_3^*}}}{1 - \sqrt{\frac{z_9 \cdot x_9^*}{z_4 \cdot x_4^*}}})^2. \quad (45)$$

Таким образом, источником погрешности является преобразование системы уравнений (1)–(3) к системе (9)–(11) и, соответственно, возникающая разница в выражениях (44)–(45). Исследуем изменение разницы значений величин  $k9_1$  и  $k9_1^*$  в зависимости от диаметра десятой ветви. Для этого на рис. 6 строим зависимости  $\frac{x_9}{x_{11}}$  (кривая № 1) и

$\frac{x_9^*}{x_{11}^*}$  (кривая № 2) от диаметра десятой ветви  
 $(d_1 = 1,202 м, \quad d_2 = 0,9 м, \quad d_3 = d_4 = 0,614 м,$   
 $d_5 = d_6 = 0,702 м, \quad d_7 = d_8 = 0,802 м,$   
 $d_9 = 0,614 м, \quad d_{inv} = d_{11} = 0,514 м,$   
 $d_{12} = d_{13} = 0,614 м,$   
 $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = L_5 = L_6 = L_9 = L_{12} = L_{13} = 1000 м,$   
 $L_7 = L_8 = 2000 м, \quad L_{10} = L_{11} = 2000 м).$

Из рис. 6 видно, что преобразование уравнений от системы (1)–(3) к системе (9)–(11) имеет две инвариантные точки:

$\frac{x_9}{x_{11}} = \frac{x_9^*}{x_{11}^*} = 1$  – перекрытие задвижкой ветви

№ 10 ( $d_{10} = 0$ );  $\frac{x_9}{x_{11}} = \frac{x_9^*}{x_{11}^*} = 2$  – симметрич-

ность схемы по величинам гидравлических сопротивлений относительно ветвей 1, 2, 9 ( $d_{10} = d_{inv}$ ). На основе этих двух точек строим параболу интерполяции рис. 6 кривую № 3.

Максимальное отклонение кривой 2 от кривой 1 составляет 0,02, что приводит к максимальной погрешности 0,56% при расчете потокораспределения. Кривая 3 – это парабола интерполяции (46), которая дает квадратичное приближение к кривой 1. Максимальное отклонение кривой 3 от кривой 1 составляет 0,046, что приводит к погрешности не более 4% при расчете потокораспределения.

$$\frac{x_9}{x_{11}} = (\frac{d_{10}}{d_{inv}})^2 + 1. \quad (46)$$

В результате получаем возможность использовать параболу интерполяции (46) для нахождения  $k9_1$  без линеаризации уравнений (1)–(3) и получать приемлемые результаты для инженерных расчетов.

## ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА

Задача потокораспределения в терминах нелинейного программирования для тепловой гидравлической цепи записывается в следующем виде [20]:

найти

$$\text{extr}(1/T) \sum_{i=1}^n z_i x_i^3, \quad (47)$$

$$Ax = Q_h, \quad (48)$$

$$\sum_{i=1}^n P_i^{\text{mov}} x_i - \sum_{i=1}^n z_i x_i^3 = 0, \quad (49)$$

$$\sum_{i=1}^n z_i x_i^3 = k(T - T_{\text{env}}), \quad (50)$$

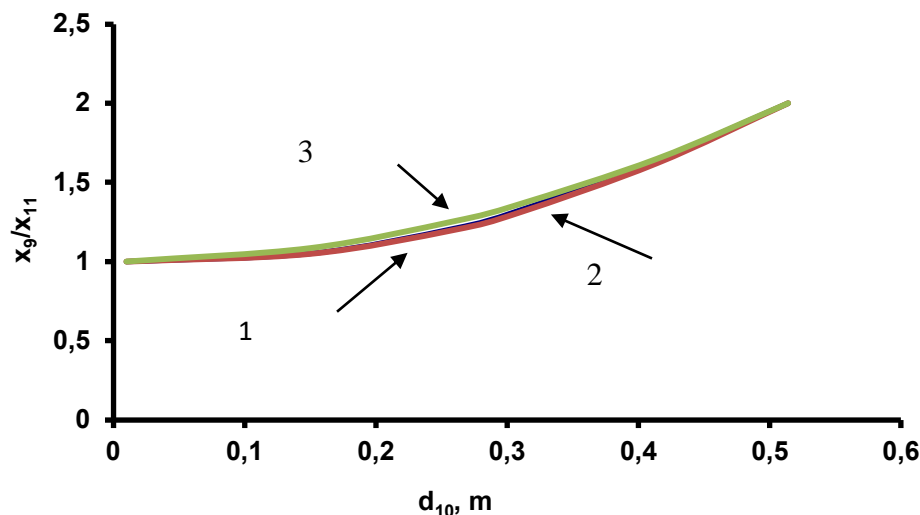


Рис. 6. Линии относительного объемного расхода: (1)  $\frac{x_9}{x_{11}}$  – относительный объемный расход при

использовании метода контурных расходов; (2)  $\frac{x_9^*}{x_{11}^*}$  – относительный объемный расход при использовании

линеаризации; (3) – парабола интерполяции  $\frac{x_9}{x_{11}}$  при преобразовании системы уравнений от (1)–(3) к (9)–(11)

Fig. 6. Lines of relative volumetric flow rate: (1)  $\frac{x_9}{x_{11}}$  – relative volumetric flow rate when using the contour flow rate method;

(2)  $\frac{x_9^*}{x_{11}^*}$  – relative volumetric flow rate when using linearization; (3) – interpolation parabola  $\frac{x_9}{x_{11}}$  when transforming the

system of equations from (1)–(3) to (9)–(11)

где  $T$  и  $T_{env}$  – температуры жидкости и окружающей среды;  $A = [a_{ij}] - (m-1) \times n$  – матрица соединений независимых узлов и ветвей;  $m$  – число узлов;  $n$  – число ветвей;  $Q_h$  – вектор внешних притоков и стоков в узлах;  $k$  – коэффициент теплопередачи;  $h$  – индекс тепловой цепи;  $P_i^{mov}$  – источник движущего давления.

Задача оптимизации функции (47) предполагает поиск варьируемых  $x_i$  ( $n$  – ветвей) и температуры жидкости. Получим  $n+1$  – число независимых переменных. Аналитический метод устанавливает связи между независимыми переменными и выделяет в качестве независимых переменных параметры расщепления. При этом число независимых переменных снижается. Например, с 14 до 3 рис. 5 или с 24 до 3 рис. 4, где вектор расхо-

дов является функцией двух параметров расщепления. При этом снижается время счета и улучшается процесс сходимости при решении задачи на компьютере.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исторически работы, проводившиеся в 60-е годы прошлого века, по теории гидравлических цепей под руководством В.Я. Хасилева были направлены на решение задач потокораспределения с помощью ЭВМ. Нелинейность уравнений гидродинамики не позволяла в полной мере использовать опыт, накопленный в теории электрических цепей. В работе [18] предложенный метод расщепления графа дал возможность свести задачу потокораспределения к задаче малой размерности и получить ее аналитическое решение в [19]. В данной работе определен некоторый минимальный элемент тепловой се-





ти, который работает независимо от прилегающих трубопроводных систем. В результате появилась возможность собирать схему тепловой сети из минимальных элементов. Однако в данном случае размерность задачи возрастает и для решения этой проблемы предлагается использовать линеаризацию

уравнений (1)–(3) и находить недостающие параметры расщепления. Проведенные численные исследования показали, что погрешность расчетов потокораспределения в тепловой сети не превышает допустимых величин погрешности для инженерных расчетов.

### Список литературы

1. Меренков А.П., Хасилев В.Я. Теория гидравлических цепей. М.: Изд-во «Наука», 1985. 278 с.
2. Сеннова Е.В., Сидлер В.Г. Математическое моделирование и оптимизация развивающихся теплоснабжающих систем. Новосибирск: Изд-во «Наука», 1987. 222 с.
3. Новицкий Н.Н., Аверьянов В.К., Сеннова Е.В., Карсевич А.М., Стенников В.А., Еделева О.А. [и др.]. Развитие методов теории гидравлических цепей для анализа и синтеза свойств трубопроводных систем как объектов управления // Трубопроводные системы энергетики: математическое моделирование и оптимизация. Новосибирск: Наука, 2010. С. 58–73.
4. Токарев В.В., Шалагинова З.И. Методика многоуровневого наладочного расчета теплогидравлического режима крупных систем теплоснабжения с промежуточными ступенями управления // Теплоэнергетика. 2016. № 1. С. 71–80.  
<https://doi.org/10.1134/S0040363616010112>
5. Токарев В.В. Разработка методики секционирования кольцевых тепловых сетей закрытых систем теплоснабжения // Теплоэнергетика. 2018. № 6. С. 84–94.  
<https://doi.org/10.1134/S0040363618060103>
6. Cross H. Analysis of flow in networks of conduits or conductors. Series/Report: University of Illinois. Engineering Experiment Station. Bulletin; no. 286. 1936. [Электронный ресурс]. URL: <http://hdl.handle.net/2142/4433> (25.05.2020).
7. LaViolette M. On the history, science, and technology included in the Moody diagram // Journal of Fluids Engineering. 2017. Vol. 139. Iss. 3.  
<https://doi.org/10.1115/1.4035116>
8. Todini E., Pilati S. A gradient algorithm for the analysis of pipe networks // Computer applications in water supply / eds. B Coulbeck, Chun-Hou Orr. London: John Wiley & Sons Research Studies Press, 1988. [Электронный ресурс]. URL: [https://www.researchgate.net/profile/Ezio\\_Todini/publication/221936261\\_A\\_gradient\\_method\\_for\\_the\\_analysis\\_of\\_pipe\\_networks/links/0046351c42430e1178000000.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Ezio_Todini/publication/221936261_A_gradient_method_for_the_analysis_of_pipe_networks/links/0046351c42430e1178000000.pdf) (25.05.2020).
9. Brkić D., Čojbašić Ž. Evolutionary optimization of Colebrook's turbulent flow friction approximations // Fluids. 2017. Vol. 2. Iss. 2.  
<https://doi.org/10.3390/fluids2020015>
10. Praks P., Brkić D. Choosing the Optimal Multi-Point Iterative Method for the Colebrook Flow Friction Equation // Processes. 2018. Vol. 6. Iss. 8.  
<https://doi.org/10.3390/pr6080130>
11. Praks P., Brkić D. Advanced iterative procedures for solving the implicit Colebrook equation for fluid flow friction // Advances in Civil Engineering. 2018. Vol. 2018.  
<https://doi.org/10.1155/2018/5451034>
12. Medhi Das B., Sarma B., Mohan Das M. Error Analysis of Friction Factor Formulae with Respect to Colebrook-White Equation // International Journals of Science and Research. 2017. Vol. 6. Iss. 3. P. 2105–2109.
13. Новицкий Н.Н., Токарев В.В. Релейная методика расчета потокораспределения в гидравлических цепях с регулируемыми параметрами // Известия Российской академии наук. Энергетика. 2001. № 2. С. 88–98.
14. Баранчикова Н.И., Епифанов С.П., Зоркальцев В.И., Куртин А.В., Обуздин С.Ю. Потокораспределение в системах подачи и распределения воды с автоматическими регуляторами давления // Водоснабжение и санитарная техника. 2017. № 4. С. 55–62.
15. Корельштейн Л.Б. Существование, единственность и монотонность решения задачи потокораспределения в гидравлических цепях с зависящими от давления замыкающими соотношениями // Математические модели и методы анализа и оптимального синтеза развивающихся трубопроводных и гидравлических систем: тр. XVI Всерос. науч. семинара (г. Иркутск, 26 июня – 2 июля 2018 г.) Иркутск: Изд-во ИСЭМ СО РАН, 2018. С. 55–83.
16. Brkić D. Discussion of «Economics and Statistical Evaluations of Using Microsoft Excel Solver in Pipe Network Analysis» by I.A. Oke, A. Ismail, S. Lukman, S.O. Ojo, O.O. Adeosun, and M.O. Nwude // Journal of Pipeline Systems Engineering and Practice. 2018. Vol. 9. Iss. 3.  
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)PS.1949-1204.0000319](https://doi.org/10.1061/(ASCE)PS.1949-1204.0000319)
17. Hoyo Arce I., Herrero Lopez S., Lopez Perez S., Rama M., Klobut K., Febres J.A. Models for fast modelling of district heating and cooling networks // Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2018. Vol. 82. Part 2. P. 1863–1873.  
<https://doi.org/10.1016/j.rser.2017.06.109>
18. Якшин С.В. Метод расщепления графа и принцип аддитивности тепловой сети // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2017. Т. 21. № 4. С. 127–138.  
<https://doi.org/10.21285/1814-3520-2017-4-127-138>
19. Якшин С.В. Применение метода расщепления графа при оптимизации параметров тепловой сети // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2018. Т. 22. № 10. С. 129–140.  
<https://doi.org/10.21285/1814-3520-2018-10-129-140>

20. Каганович Б.М., Стенников В.А., Зароднюк М.С., Якшин С.В. Равновесное экологическое моделирование интегрированных энергетических систем // Математические модели и методы анализа и оптимального

синтеза развивающихся трубопроводных и гидравлических систем: тр. XVI Всерос. науч. семинара (г. Иркутск, 26 июня – 2 июля 2018 г.). Иркутск: Изд-во ИСЭМ СО РАН, 2018. С. 34–43.

## References

1. Merenkov AP, Khasilev VYa. *The theory of hydraulic circuits*. Moscow: Nauka; 1985, 278 p. (In Russ.)
2. Sennova EV, Sidler VG. *Mathematical modeling and optimization of developing heat supply systems*. Novosibirsk: Nauka; 1987, 222 p. (In Russ.)
3. Novitsky NN, Aver'yanov VK, Sennova EV, Karasevich AM, Stennikov VA, Edeleva OA, et al. Development of methods of hydraulic circuits theory for analysis and synthesis of properties of pipeline systems as control objects. In: *Truboprovodnye sistemy energetiki: matematicheskoe i komp'yuternoe modelirovanie* = Energy Pipeline Systems: Mathematical and Computer Modeling. Novosibirsk: Nauka; 2010, p. 58–73. (In Russ.)
4. Tokarev VV, Shalaginova ZI. Technique of multilevel adjustment calculation of the heat-hydraulic mode of the major heat supply systems with the intermediate control stages. *Teploenergetika* = *Thermal Engineering*. 2016;1:71-80. (In Russ.)  
<https://doi.org/10.1134/S0040363616010112>
5. Tokarev VV. Developing a procedure for segmenting ring heat networks of closed heat supply systems. *Teploenergetika* = *Thermal Engineering*. 2018;6:84–94. (In Russ.) <https://doi.org/10.1134/S0040363618060103>
6. Cross H. Analysis of flow in networks of conduits or conductors. Series/Report: University of Illinois. Engineering Experiment Station. Bulletin; no. 286. 1936. Available from: <http://hdl.handle.net/2142/4433> [Accessed 25th May 2020].
7. LaViolette M. On the history, science, and technology included in the Moody diagram. *Journal of Fluids Engineering*. 2017;139:3. <https://doi.org/10.1115/1.4035116>
8. Todini E, Pilati S. A gradient algorithm for the analysis of pipe networks. In: Coulbeck B, Orr Chun-Hou (eds.). *Computer applications in water supply*. London: John Wiley & Sons Research Studies Press; 1988. Available from: [https://www.researchgate.net/profile/Ezio\\_Todini/publication/221936261\\_A\\_gradient\\_method\\_for\\_the\\_analysis\\_of\\_pipe\\_networks/links/0046351c42430e1178000000.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Ezio_Todini/publication/221936261_A_gradient_method_for_the_analysis_of_pipe_networks/links/0046351c42430e1178000000.pdf) [Accessed 25th May 2020].
9. Brkić D, Čojbašić Ž. Evolutionary optimization of Colebrook's turbulent flow friction approximations. *Fluids*. 2017;2(2). <https://doi.org/10.3390/fluids2020015>
10. Praks P, Brkić D. Choosing the optimal multi-point iterative method for the Colebrook flow friction equation. *Processes*. 2018;6(8). <https://doi.org/10.3390/pr6080130>
11. Praks P, Brkić D. Advanced iterative procedures for solving the implicit Colebrook equation for fluid flow friction. *Advances in Civil Engineering*. 2018;2018. <https://doi.org/10.1155/2018/5451034>
12. Medhi Das B, Sarma B, Mohan Das M. Error analysis of friction factor formulae with respect to Colebrook-White equation. *International Journals of Science and Research*. 2017;6(3):2105–2109.
13. Novitsky NN, Tokarev VV. Relay method of calculation of flow distribution in hydraulic circuits with adjustable parameters. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Energetika*. 2001;2:88–98. (In Russ.)
14. Baranchikova NI, Epifanov SP, Zorkal'tsev VI, Kurtin AV, Obuzdin SYu. Flow distribution in water supply and distribution systems with automatic pressure regulators. *Vodosnabzhenie i sanitarnaya texnika* = *Water supply and sanitary technique*. 2017;4:55–62. (In Russ.)
15. Korel'shtein LB. Existence, uniqueness and monotonicity of the solution of the flow distribution problem in hydraulic circuits with pressure-dependent closing relations. In: *Matematicheskie modeli i metody analiza i optimal'nogo sinteza razvivayushchihsysa truboprovodnyh i gidravlicheskih sistem: trudy XVI Vserossijskogo nauchnogo seminar* = *Mathematical Models and Methods of Analysis and Optimal Synthesis of the Developing Pipeline and Hydraulic Systems: Proceedings of XVI All-Russian scientific seminar*. June 26 – July 2 2018, Irkutsk. Irkutsk: Melentiev Energy Systems Institute of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences; 2018, p. 55–83. (In Russ.)
16. Brkić D. Discussion of «Economics and statistical evaluations of using Microsoft Excel solver in pipe network analysis» by I.A. Oke, A. Ismail, S. Lukman, S.O. Ojo, O.O. Ade-osun, and M.O. Nwude. *Journal of Pipeline Systems Engineering and Practice*. 2018;9:3. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)PS.1949-1204.0000319](https://doi.org/10.1061/(ASCE)PS.1949-1204.0000319)
17. Hoyo Arce I, Herrero Lopez S, Lopez Perez S, Rama M, Klobut K, Febres JA. Models for fast modelling of district heating and cooling networks. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2018;82(2):1863–1873. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2017.06.109>
18. Yakshin SV. The method of graph splitting and the principle of heating network additivity. *Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* = *Proceedings of Irkutsk State Technical University*. 2017;21(4):127–138. (In Russ.)  
<https://doi.org/10.21285/1814-3520-2017-4-127-138>
19. Yakshin SV. Application of graph splittance method when optimizing heating network parameters. *Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* = *Proceedings of Irkutsk State Technical University*. 2018;22(10):129–140. (In Russ.)  
<https://doi.org/10.21285/1814-3520-2018-10-129-140>
20. Kaganovich BM, Stennikov VA, Zароднюк MS, Yakshin SV. Equilibrium ecological modeling of integrated energy systems. In: *Matematicheskie modeli i metody analiza i optimal'nogo sinteza razvivayushchihsysa truboprovodnyh i gidravlicheskih sistem: trudy XVI Vserossijskogo nauchnogo seminar* = *Mathematical Models and Methods of Analysis and Optimal Synthesis of the*



*Developing Pipelines and Hydraulic Systems: Proceedings of XVI All-Russian scientific seminar. June 26 – July 2 2018, Irkutsk. Irkutsk: Melentiev Energy Systems Insti-*

*tute of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences; 2018, p. 34–43. (In Russ.)*

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Якшин Сергей Владимирович,**  
ведущий инженер,  
Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева  
СО РАН,  
664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 130, Россия;  
✉ e-mail: s.yakshin@isem.irk.ru

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

**Sergey V. Yakshin,**  
Leading Engineer,  
Melentiev Energy Systems Institute  
of the Siberian Branch  
of the Russian Academy of Sciences,  
130, Lermontov St., Irkutsk 664033, Russia;  
✉ e-mail: s.yakshin@isem.irk.ru

#### Заявленный вклад автора

Автор выполнил исследовательскую работу, на основании полученных результатов провел обобщение, подготовил рукопись к печати.

#### Contribution of the author

The author performed the research, made a generalization based on the results obtained and prepared the copy-right for publication.

#### Конфликт интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

#### Conflict of interests

The author declares no conflict of interests.

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*

*The final manuscript has been read and approved by the author.*

#### Информация о статье

Статья поступила в редакцию 13.01.2021; одобрена после рецензирования 03.02.2020; принята к публикации 26.02.2021.

#### Information about the article

The article was submitted 13.01.2021; approved after reviewing 03.02.2020; accepted for publication 26.02.2021.