

ЭНЕРГЕТИКА

Обзорная статья

УДК 621.311:517.938

EDN: IROVSJ

DOI: 10.21285/1814-3520-2026-2-259-276



Применение спектральных разложений грамианов управляемости и наблюдаемости для мониторинга и управления электроэнергосистемами

Е.Ю. Кутяков^{1✉}, А.Б. Исаков², И.Б. Ядыкин³, Д.Е. Катаев⁴, А.А. Шевляков⁵,
И.Ф. Пересветова⁶, А.В. Ахметзянов⁷

¹⁻⁷Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Российская Федерация

Резюме. Цель исследования – дать краткий обзор результатов применения спектральных разложений грамианов управляемости и наблюдаемости по собственным числам матрицы динамики для мониторинга и управления электроэнергосистемами. Используется новая концепция модального анализа по Ляпунову, сочетающая традиционный селективный модальный анализ со спектральным разложением специально выбранных функций Ляпунова по спектру матрицы динамики. В отличие от традиционных коэффициентов участия, используются коэффициенты участия по Ляпунову, которые отражают вклад мод системы в функции Ляпунова, оценивающие интегральную энергию, определяемую квадратом L2-нормы переменных состояния или сигналов на конечном или бесконечном интервале времени. В отличие от известных методов нелинейного модального анализа, новые показатели позволяют учитывать нелинейности во времени и резонансы между модами с близкими частотами. В работе рассмотрены три применения модального анализа по Ляпунову к электроэнергосистемам. Во-первых, представлен метод оценки структуры низкочастотных колебаний и их взаимодействий как в пространстве состояний, так и с учетом их расположения на графе системы. Предлагаемые показатели позволяют анализировать не только структуру отдельных межрайонных колебаний, но и геометрию их парных взаимодействий в узлах сети. Во-вторых, представлен селективный метод настройки глобального линейно-квадратичного регулятора для подавления выбранной группы межрайонных колебаний. Новый метод улучшает подавление выбранной группы мод, по сравнению с базовым методом линейно-квадратичного регулятора. В-третьих, представлен метод определения местоположения источника вынужденных колебаний в сети (когда их частота близка к частоте собственных колебаний системы), который показал высокую эффективность на тестовых примерах. Рассмотренные примеры подтверждают, что модальный анализ на основе спектральных разложений решений матричных уравнений, используемых в теории управления, может стать ценным инструментом для разработки новых алгоритмов и интеллектуальных методов управления макро- и микросетями.

Ключевые слова: грамианы управляемости и наблюдаемости, спектральные разложения, электроэнергетические системы, оценка структуры колебаний, настройка регуляторов, местоположение источника вынужденных колебаний, подавление межрайонных колебаний

Благодарности. Коллектив авторов выражает благодарность Н.В. Томину и Д.А. Панасецкому из Института систем энергетики им. Л.А. Мелентьева СО РАН, чьи результаты используются в статье.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, грант No. 25-29-20158.

Для цитирования: Кутяков Е.Ю., Исаков А.Б., Ядыкин И.Б., Катаев Д.Е., Шевляков А.А., Пересветова И.Ф., Ахметзянов А.В. Применение спектральных разложений грамианов управляемости и наблюдаемости для мониторинга и управления электроэнергосистемами // iPolytech Journal. 2026. Т. 30. № 2. С. 259–276 <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2026-2-259-276>. EDN: IROVSJ.

POWER ENGINEERING

Review article

Application of spectral decompositions of controllability and observability Gramians to power-system monitoring and control

Evgeniy Yu. Kutyakov^{1✉}, Alexey B. Isakov², Igor B. Yadykin³, Dmitry E. Kataev⁴,
Andrey A. Shevlyakov⁵, Inna F. Peresvetova⁶, Atlas V. Akhmetzyanov⁷

¹⁻⁷V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Abstract. This study reviews spectral decompositions of the controllability and observability Gramians, expressed in terms of the eigenvalues of the system dynamics matrix, and evaluates their application in monitoring

and control of electric power systems. The approach is based on a new concept of Lyapunov modal analysis, which combines traditional selective modal analysis with the spectral decomposition of specially constructed Lyapunov functions over the spectrum of the dynamics matrix. Unlike conventional participation factors, the method employs Lyapunov participation factors, which quantify the contribution of individual system modes to Lyapunov functions characterizing the integral energy of state variables or signals through the squared L2-norm over finite or infinite time intervals. In contrast to existing nonlinear modal-analysis methods, the proposed indicators account for time-varying nonlinearities and resonant interactions between modes with closely spaced frequencies. Three applications of Lyapunov modal analysis to power-system problems are considered. First, a method is proposed for characterizing the structure of low-frequency oscillations and their interactions both in the state-space representation and with respect to their location on the network graph. The proposed indicators enable analysis of individual inter-area modes, as well as of the geometry of their pairwise interactions at network nodes. Second, a selective tuning procedure for a global linear quadratic regulator (LQR) is developed to suppress a selected group of inter-area oscillations. The proposed method provides improved damping of the targeted modal group compared with the baseline LQR design. Third, a method is presented for locating the source of a forced oscillation whose frequency is close to a natural system mode. Test cases demonstrate the high effectiveness of the proposed approach. The examples confirm that modal analysis based on spectral decompositions of solutions to matrix equations arising in control theory can serve as an effective tool for developing new algorithms and intelligent control methods for both macrogrids and microgrids.

Keywords: controllability and observability gramians, spectral decompositions, electric power systems, oscillation structure estimation, controller tuning, forced oscillation source location, damping of inter-area oscillations

Acknowledgments. The authors express their gratitude to N.V. Tomin and D.A. Panasetsky from the Melentyev Energy Systems Institute SB RAS, whose results are used in this article.

Funding. This work was supported by the Russian Science Foundation, project no. 25-29-20158.

For citation: Kutyaov E.Yu., Iskakov A.B., Yadykin I.B., Kataev D.E., Shevlyakov A.A., Peresvetova I.F., Akhmetzyanov A.V. Application of spectral decompositions of controllability and observability Gramians to power-system monitoring and control. *iPolytech Journal*. 2026;30(2):259-276. (In Russ.). <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2026-2-259-276>. EDN: IROVSJ.

ВВЕДЕНИЕ

Грамианы управляемости и наблюдаемости, а также их обратные матрицы широко используются для структурного проектирования [1], управления с минимальным потреблением энергии [2], уменьшения размерности моделей [3], оптимального выбора и размещения исполнительных механизмов и датчиков [4], анализа и проектирования сетей [5], оценки колебаний и их взаимодействий в электросистемах [6], настройки регуляторов [7] и управления транспортом [8].

Сингулярные разложения грамианов широко используются в методах понижения размерности моделей [9], схемах фильтрации на основе грамианов [10], быстрой обработке изображений [11] и аппроксимации больших разреженных энергетических систем [12].

Альтернативный подход, в котором грамианы разлагаются не по собственному спектру, а по спектру матрицы динамики системы, рассматривался в ряде работ [13–15], но пока не получил широкого практического применения. Мы считаем, что он может объединить преимущества модального анализа системы с анализом устойчивости по Ляпунову и улучшить различные существующие

методы оценки устойчивости и оптимального управления, которые основаны на применении грамианов. В данной статье собрано несколько примеров, которые демонстрируют потенциал применения предлагаемого подхода в задачах управления в электроэнергетике.

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ГРАМИАНОВ

Рассмотрим линейную динамическую систему с непрерывным временем вида:

$$\begin{aligned} dx(t)/dt &= Ax(t) + Bu(t); \\ y(t) &= Cx(t), t \in R, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x \in R^n$ – состояние; $u \in R^m$ – управление; $y \in R^p$ – выходной сигнал; A – матрица динамики; B – матрица ввода; C – матрица выхода.

Самыми известными в теории управления величинами, характеризующими свойства управляемости, наблюдаемости и устойчивости системы (1) являются *грамианы управляемости и наблюдаемости* P_c и P_o , которые для устойчивой системы можно получить как решения соответствующих уравнений Ляпунова:

$$AP_C + P_C A^T = -BB^T; A^T P_O + P_O A = -C^T C. \quad (2)$$

Разложения грамианов по спектру матрицы динамики рассматривались в [13, 14]. В [16] соответствующие разложения были получены на основе матричных вычетов резольвенты, что позволило их эффективно вычислять для систем средней и большой размерностей. Спектральные разложения для грамиана наблюдаемости P_O имеют вид:

$$P_O = \sum_{i=1}^n \tilde{P}_i = \sum_{i,j=1}^n P_{ij}; \quad (3)$$

$$\tilde{P}_i = \sum_{j=1}^n P_{ij}.$$

$$\tilde{P}_i = -\{R_i^* C^T C (\lambda_i^* I + A)^{-1}\}_{Herm};$$

$$P_{ij} = \left\{ \frac{-1}{\lambda_i^* + \lambda_j} R_i^* C^T C R_j \right\}_{Herm}, \quad (4)$$

где $\{\dots\}_{Herm}$ обозначает самосопряженную часть матрицы, $(\cdot)^*$ – эрмитово сопряжение, а R_i и R_j – матричные вычеты, соответствующие собственным числам λ_i и λ_j , т.е. матричные коэффициенты в разложении резольвенты системы:

$$(Is - A)^{-1} = \frac{R_1}{s - \lambda_1} + \frac{R_2}{s - \lambda_2} + \dots + \frac{R_n}{s - \lambda_n}. \quad (5)$$

При оценке устойчивости спектральные компоненты $\tilde{P}_i$ и P_{ij} в (3) характеризуют компоненты выходного возмущения в связи с отдельными модами и их парными комбинациями соответственно. Аналогичные разложения имеют место для грамиана управляемости P_C .

Базовые условия применения спектрального разложения грамианов (3)–(4), которые мы принимаем в данной статье, следующие:

1. Оператор Ляпунова в (2) невырожденный, т.е. собственные значения матрицы A удовлетворяют условию: $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ для всех $\lambda_i, \lambda_j \in \sigma(A)$, $i, j = 1, \dots, n$, что необходимо и достаточно для существования единственного решения уравнений (2).

2. Матрица A диагонализируема над полем комплексных чисел и имеет простой спектр. То есть существует обратимая ма-

трица U , столбцы которой являются линейно независимыми собственными векторами матрицы A , и диагональная матрица Λ с различными диагональными элементами такая, что $A = U\Lambda U^{-1}$.

3. Матрица A может быть устойчивой или неустойчивой. Для строго устойчивой A решения (2) можно интерпретировать как бесконечные грамианы управляемости и наблюдаемости соответственно. Если A неустойчива, то разложение (3)–(4) и его спектральные компоненты требуют специальной интерпретации [16, 17].

4. Динамическое поведение матриц A и B можно описать как плавную функцию параметров системы, которая движется вдоль определенной траектории состояния. Это стандартное предположение модального анализа, при котором можно применять понятие спектра матрицы.

Во всех дальнейших численных примерах эти условия выполняются. Спектральные разложения (3)–(4) были обобщены на случаи, когда некоторые из перечисленных выше условий нарушаются [16–18]. Тем не менее, в этих случаях их применение требует специальных интерпретаций или дополнительных исследований и потому выходит за рамки данного обзора.

ОЦЕНКА МОДАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

В традиционном линейном модальном анализе модальные взаимодействия напрямую не учитываются. В нелинейных версиях модального анализа, таких как подход с использованием нормальных форм [19], методы модальных рядов [20] и билинейные аппроксимации [21], рассматриваются вторые и более высокие члены разложения динамики системы в ряд Тейлора. При этом устойчивость оценивается для некоторого начального возмущения с точки зрения мгновенной динамики. Однако в больших динамических системах, подверженных воздействию шума или вынужденных колебаний, возмущения могут накапливаться с течением времени. В данном случае устойчивость по малому сигналу определяется энергией возмущений, накопленных в системе. Для анализа этой энергии в исследовании [22] была разработана новая концепция модального анализа по Ляпунову, LMA (от англ. Lyapunov Modal

Analysis), которая сочетает селективный модальный анализ [23] со спектральными разложениями вида (3)–(4) для специально выбранных функций Ляпунова. На основе этого подхода были предложены новые модальные показатели. Традиционные коэффициенты участия характеризуют относительный вклад мод системы в эволюцию переменных состояния. В отличие от них, предлагаемые коэффициенты участия по Ляпунову отражают аналогичный вклад в функции Ляпунова, которые оценивают интегральную энергию, определяемую квадратом L_2 нормы переменных состояния и сигналов на бесконечном или конечном интервале времени. Коэффициенты модального взаимодействия по Ляпунову характеризуют попарное взаимодействие между модами с точки зрения их взаимного влияния, проявляющегося в переменных состояния с течением времени.

В [22] показано, что предложенные модальные показатели характеризуют устойчивость отдельных мод и резонансные модальные взаимодействия в линейных системах с изменяющимися параметрами. Эти показатели могут быть рассчитаны независимо для выбранной части спектра системы и использованы для быстрой оценки поведения критических мод в крупномасштабных динамических системах.

Для демонстрации предложенного подхода была использована модель двухрай-

онной электроэнергетической системы (ЭЭС), описанная в монографии П. Кундура в 1994 г. [24]. Она состоит из двух областей, соединенных слабой связью. Каждая область состоит из двух связанных станций. Для динамического анализа все генераторы энергосистемы представлены моделями шестого порядка. Регуляторы скорости не учитывались. Выбранные параметры модели были такими же, как в учебнике [24] (пример 12.6, с. 813). Мы исследовали предел устойчивости системы, одновременно увеличивая все нагрузки (P_L , Q_L , Q_C) и активную мощность каждого генератора (P_i), сохраняя при этом соотношения между ними фиксированными. Мы определили коэффициент увеличения мощности как $\gamma = P/P_0 = Q/Q_0$. Увеличение γ приводило к изменению режима работы. На рис. 1 слева изображено поведение модальных компонент функции Ляпунова в зависимости от параметра γ . Справа приведено соответствующее поведение коэффициентов участия по Ляпунову опасных мод в выбранной моде М6, которая в начальный момент соответствует собственному числу $-0,492 \pm 6,82j$.

Полученные графики позволяют наблюдать общую структуру модального взаимодействия и выявлять:

– неустойчивости межрайонных колебаний (b), (d) и (f);

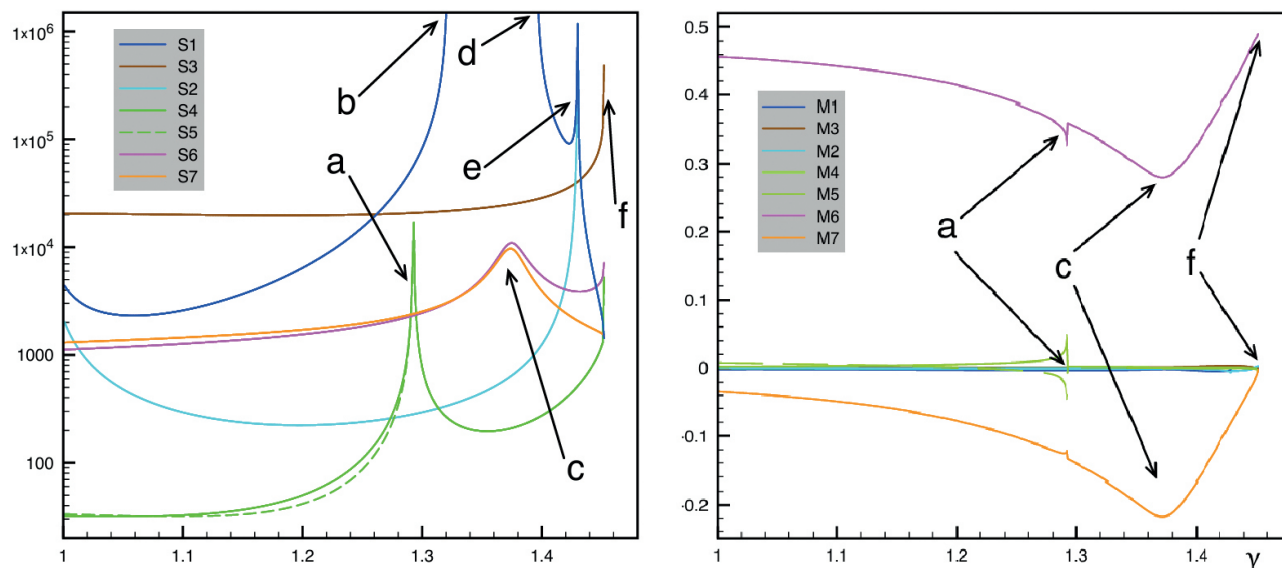


Рис. 1. Модальные вклады по Ляпунову опасных мод системы (слева) и коэффициенты участия по Ляпунову опасных мод в моде М6 (справа)

Fig. 1. Lyapunov modal contributions of dangerous modes of the system (left) and Lyapunov participation coefficients of dangerous modes in the M6 mode (right)

- слияния аperiodических мод в низкочастотные колебания (а) и (е);
- авторезонанс между двумя колебаниями (с).

ОЦЕНКА МОДАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ НА ГРАФЕ СЕТИ

Современные крупномасштабные ЭЭС сталкиваются с серьезными угрозами устойчивости в виде низкочастотных колебаний [25]. Важной характеристикой таких колебаний является то, что для каждой моды существует набор «коридоров», через которые она распространяется по системе [26]. Если такие коридоры взаимодействия могут быть идентифицированы, и они наблюдаемы, то и соответствующие превентивные меры могут быть приняты для обеспечения устойчивости и увеличения пропускной способности системы при сохранении ее высокой надежности [27].

В исследовании [6] на основе концепции модального анализа по Ляпунову был предложен метод оценки расположения и структуры межрайонных колебаний, а также их взаимодействий на графе ЭЭС. Были рекомендо-

ваны модальные показатели, которые, в отличие от традиционного модального анализа, учитывают энергию возмущений напряжения, накапливаемую во времени, а не мгновенную динамику отдельного возмущения. Эти показатели позволяют анализировать не только расположение и структуру отдельных межрайонных колебаний, но также геометрию и структуру их парных взаимодействий с точки зрения их взаимного действия, проявляющегося в узлах с течением времени.

В сценарном эксперименте для выбранных межрайонных колебаний было определено расположение критических узлов и линий на графе сети. В качестве тестовой системы использована стандартная модель системы IEEE (от англ. Institute of Electrical and Electronics Engineers) с 68 шинами. Она состоит из 16 генераторов, 68 узлов и 86 линий, объединенных в пять областей. Модель собрана в программном обеспечении с открытым исходным кодом PSAT (от англ. Power System Analysis Toolbox) [28], а параметры модели получены из отчета рабочей группы IEEE PES (от англ. Power and Energy Society) [29]. Электрическая схема этой си-

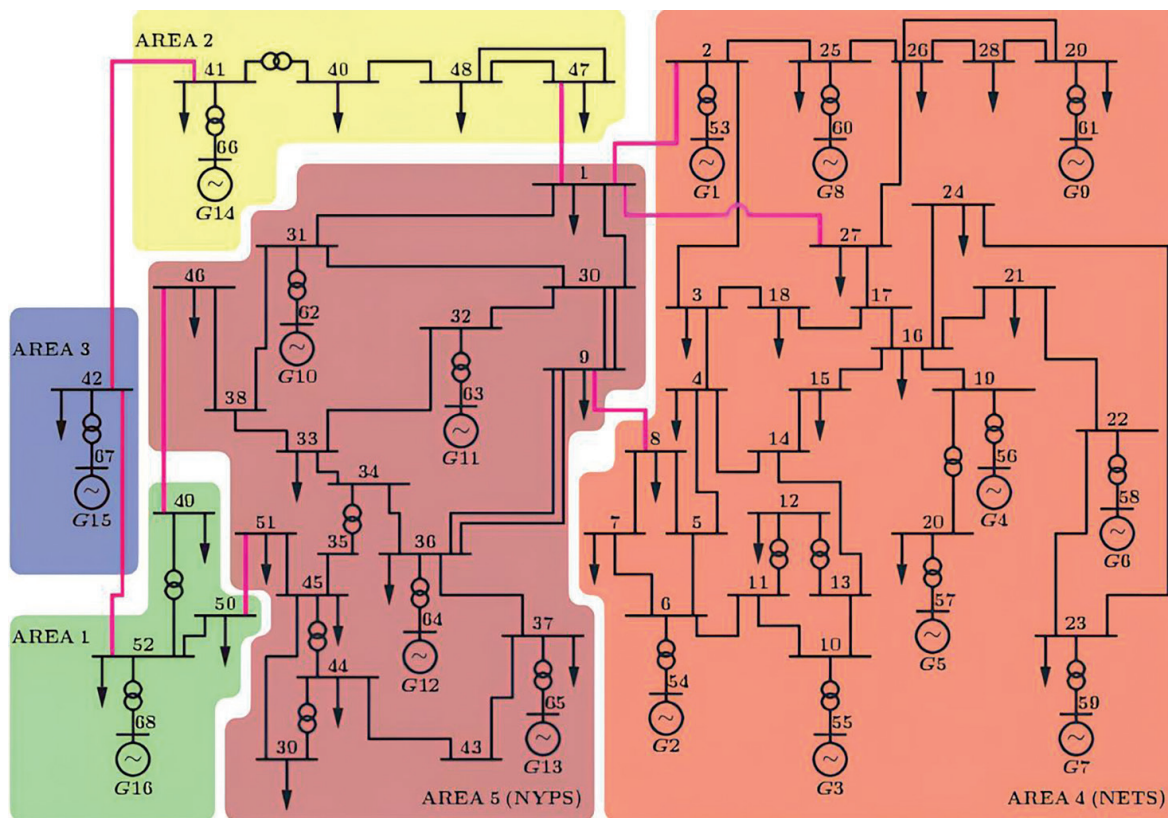


Рис. 2. Схема тестовой системы Института инженеров электротехники и электроники с 68 шинами
Fig. 2. Schematic of the Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) 68-bus test system

стемы показана на рис. 2. Во время сценарного эксперимента применялось плавное уменьшение реактивного сопротивления линий, соединяющих узлы 52/42 и 42/41, от начального значения $X_{start} = 0,060$ р.у. до $X_{end} = 0,003$ р.у. в конце эксперимента в зависимости от параметра α следующим образом: $X = X_{start} \cdot (1 - \alpha)$, где $0 < \alpha < 0,95$.

На рис. 3 на графе ЭЭС изображены профили возмущений амплитуды напряжения, вызванные двумя выбранными межрайонными колебаниями M15 и M18 с начальными собственными числами $-0,072 \pm 2,88j$ и $-0,152 \pm 3,70j$ соответственно. Получено хорошее соответствие результатов с известным методом сетевых модальных профилей (network modeshapes) [26].

Однако (в отличие от этого метода) предлагаемый подход можно также использовать для анализа резонансных явлений, возника-

ющих в современных ЭЭС, особенно в связи с ростом доли возобновляемых источников энергии (ВИЭ) и активным применением тиристорных преобразователей. Для демонстрации этого в [6] был проведен численный эксперимент, который моделировал изменение реактивного сопротивления ключевых линий электропередачи в энергосистеме IEEE-68 с использованием тиристорных преобразователей. В ходе сценарного эксперимента частоты межрайонных колебаний M15 и M18 начинали сближаться, и происходило их резонансное модальное взаимодействие при $\alpha = 0,54$. Слева на рис. 4 показана динамика резонансного взаимодействия возмущений угла напряжения в узлах в зависимости от параметра компенсации линии α , а справа – профиль резонансного взаимодействия двух колебаний на графе электросети при $\alpha = 0,54$.

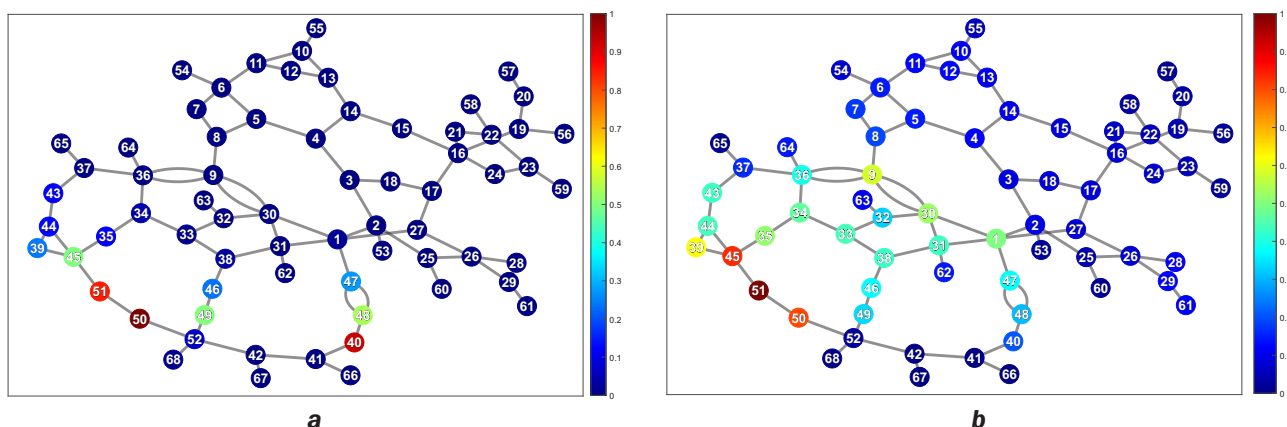


Рис. 3. Профили возмущений амплитуды напряжения, вызванных колебаниями M15 (a) и M18 (b) на графе электроэнергетической системы IEEE-68

Fig. 3. Profiles of voltage amplitude disturbances caused by M15 (a) and M18 (b) oscillations on the IEEE-68 power system graph

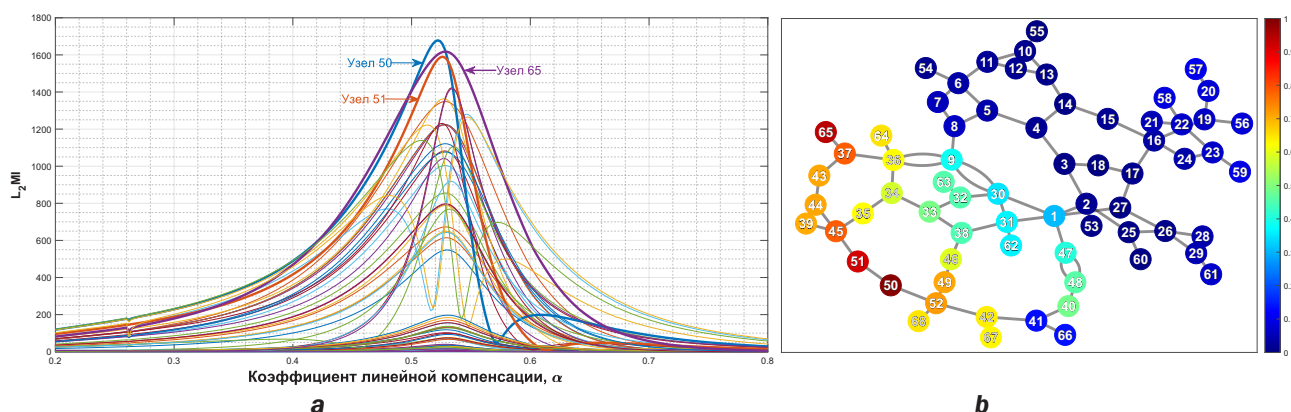


Рис. 4. Динамика резонансного взаимодействия возмущений угла напряжения в узлах в зависимости от α (слева) и профиль резонансного взаимодействия колебаний на графе электросети (справа)

Fig. 4. Dynamics of the resonant interaction of voltage angle disturbances in nodes depending on α (left) and the profile of resonant interaction of oscillations on the power grid graph (right)

Таким образом, новый подход позволяет оценивать автопараметрические резонансы в системах с изменяющимися параметрами и нелинейные эффекты, связанные с накоплением возмущений во времени. Дополнительная информация о межмодальных взаимодействиях в системе может улучшить различные методы управления, применяемые для демпфирования межрайонных колебаний, оптимального размещения датчиков и стабилизаторов, а также для анализа устойчивости.

Проведем сравнение предложенного подхода для учета возмущений в состояниях и сигналах с двумя другими принципиально отличающимися подходами, используемыми в литературе. А именно сравним следующие три подхода:

1) мгновенная мера при линейных дифференциальных зависимостях, используемая в методах линейного модального анализа (ЛМА) [23, 26];

2) мгновенная мера с учетом полиномиальных дифференциальных зависимостей, используемая в методах нелинейного модального анализа (НЛМА) на основе аппроксимаций уравнений с более высокими порядками точности [19–21];

3) интегральная мера на интервале времени, используемая в модальном анализе по Ляпунову (МАЛ) [6, 22].

В табл. 1 приведено сравнение этих трех подходов по тем критериям, которые их отличают. При этом независимые методы для учета, например, задержек, структурных ограничений, фильтрации сигналов и ряда других эффектов, могут использоваться независимо с каждым из этих подходов и дополнять их.

ЛМА напрямую не учитывает нелинейных эффектов, НЛМА учитывает нелинейные связи между переменными состояний и связанные с ними резонансы. МАЛ оценивает резо-

Таблица 1. Сравнение подходов линейного модального анализа, нелинейного модального анализа и модального анализа по Ляпунову

Table 1. Comparison of linear modal analysis, nonlinear modal analysis, and Lyapunov modal analysis approaches

Критерии сравнения	Линейный модальный анализ [23, 26]	Нелинейный модальный анализ (на основе нормальных форм) [19–21]	Модальный анализ по Ляпунову [6, 22]
	(1)	(2)	(3)
Учет нелинейности и резонансов	Напрямую не учитывает	Учитывает нелинейности и резонансы между состояниями	Учитывает нелинейности во времени и резонансы между модами с близкими частотами
Вычислительная сложность	Масштабируется как $O(n^3)$ либо определяется скоростью идентификации собственных чисел и векторов	Высокая по сравнению с (1) и (2) в связи с необходимостью вычисления нелинейных членов в разложениях. Быстро растет с порядком учитываемой нелинейности	Масштабируется как $O(n^3)$ либо определяется скоростью идентификации собственных чисел и векторов
Возможность алгоритма на основе измерений	Возможно, но требует идентификации собственных чисел и векторов в некотором числе узлов	Усложняется по сравнению с (1) и (2) необходимостью идентификации нелинейных связей между переменными	Возможно, но требует идентификации собственных чисел и векторов в некотором числе узлов
Учитывает ли большие возмущения?	Строго обоснован для оценки устойчивости при малых возмущениях. Линейные модели обычно не используются при работе с большими возмущениями	Строго обоснован для оценки устойчивости при малых возмущениях. Однако учитывает большие возмущения лучше по сравнению с (1) и (2)	Строго обоснован для оценки устойчивости при малых возмущениях. Линейные модели обычно не используются при работе с большими возмущениями
Нестационарность	Предполагает наличие плавной линеаризации системы, движущейся вдоль траектории состояния	То же самое, но лучше учитывает нестационарные изменения по сравнению с (1) и (2)	Предполагает наличие плавной линеаризации системы, движущейся вдоль траектории состояния
Параметрическая неопределенность	Алгоритмы теряют устойчивость при оценке кратных собственных мод системы	Дополнительно к (1) алгоритмы теряют устойчивость при оценке резонансных условий соответствующих порядков	Алгоритмы сохраняют устойчивость при любых собственных числах

нансы между модами с близкими частотами в виде интеграла по времени их произведения. Это разные резонансы. Например, резонанс двух линейных контуров с близкими частотами методы НЛМА оценить не могут, а подход МАЛ оценивает его в соответствии с классическим пониманием физики как интеграл их совместного действия во времени. Таким образом, методы НЛМА и МАЛ имеют разную область применимости и нацелены на дополнительный учет разных эффектов по сравнению с ЛМА. По вычислительной сложности ЛМА и МАЛ масштабируются как $O(n^3)$, если задана модель системы, либо определяются скоростью алгоритма идентификации соответствующих собственных чисел и векторов. Вычислительная сложность методов НЛМА существенно выше в связи с необходимостью вычисления нелинейных членов в разложениях, и она быстро растет в соответствии с порядком учитываемой нелинейности. Все три подхода позволяют построить алгоритмы на основе данных измерений, но НЛМА усложняется необходимостью дополнительно идентифицировать нелинейные связи между переменными. Все три подхода строго обоснованы для оценки устойчивости только при малых возмущениях и могут терять точность при больших возмущениях. Поэтому линейные методы ЛМА и МАЛ обычно не используются при работе с большими возмущениями. Однако НЛМА учитывает большие возмущения лучше по сравнению с ЛМА и МАЛ и в отдельных случаях может использоваться при их оценке. Все три подхода имеют ограниченную применимость для нестационарных систем, а именно предполагается, что динамическое поведение энергосистем можно описать как плавную линеаризацию нелинейной системы, движущейся вдоль определенной траектории состояния. Тогда для целей анализа устойчивости при малых сигналах мы можем аппроксимировать модель энергосистемы как линейную систему с плавно изменяющимися параметрами. Отметим также, что методы ЛМА чувствительны к параметрам системы и теряют точность при оценке кратных собственных мод системы. То же самое можно сказать по отношению алгоритмам НЛМА, с тем дополнением, что они также теряют устойчивость при оценке резонансных условий соответствующих порядков. В отли-

чие от этого, алгоритмы МАЛ могут быть реализованы так, что сохраняют устойчивость при любых кратностях собственных чисел системы.

ИЗБИРАТЕЛЬНОЕ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЕ ДЕМПФИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ

Системные стабилизаторы PSS (от англ. Power System Stabilizer) являются одним из наиболее распространенных средств подавления колебаний в ЭЭС. Несмотря на то, что при определенных настройках и условиях они способны подавлять низкочастотные межрайонные колебания (0,1–3 Гц), обычно они подавляют только локальные колебания с частотой выше 2 Гц. Это связано с тем, что межрайонные колебания чаще всего не наблюдаются напрямую из локальных измерений, с которыми работает стандартный системный стабилизатор. По мере развития средств мониторинга появились модификации системных стабилизаторов, способные учитывать глобальные сигналы, приходящие на вход регулятора не только от управляемого генератора, но и от других генераторов системы. Со временем такой тип управления получил название глобального управления демпфированием WADC (от англ. Wide Area Damping Control) [30].

В работе [31] был предложен подход к синтезу глобального избирательно демпфирующего регулятора с помощью энергетических метрик модального анализа по Ляпунову. Критерий оптимизации строится по аналогии с критерием для классического линейно-квадратичного регулятора LQR (от англ. Linear-Quadratic Regulator), который выражается через грамиан наблюдаемости. Однако вместо полного грамиана используется частичный, учитывающий вклад в энергию выходного сигнала только тех мод, которые удовлетворяют определенным требованиям. Требования произвольны, но для задачи глобального управления демпфированием в электроэнергетике можно выбрать, например, только колебательные моды с частотой ниже 3 Гц и слабодемпфированные моды любой частоты. Это позволяет преодолеть один из основных недостатков линейно-квадратичных регуляторов – склонность к демпфированию всех мод системы, в том числе и хорошо демпфированных, что может приводить к избыточ-

ным управляющим воздействиям и неэффективному использованию ресурсов системы управления [32]. Примером существующего подхода к решению этой проблемы может служить увеличивающий разреженность линейно-квадратичный регулятор (от англ. LQR-based sparsity-promoting) [33].

В ходе численного эксперимента с использованием модели энергосистемы IEEE с 39 узлами (порядок линейной модели – 114) было проведено сравнение избирательного глобального LQR-регулятора и LQR-регулятора со структурными ограничениями. Модель системы реализована со своими классическими параметрами, но с добавлением системных стабилизаторов для генераторов G1-G9, блок-схема которых представлена на рис. 5, а параметры – в табл. 2. Генератор G10 – эквивалентная модель соседнего энергорайона и не оборудован стабилизатором.

Переходные процессы возмущения угла ротора и частоты, а также управляющего сигнала приведены на рис. 6. Можно видеть, что избирательный регулятор при незначительном ухудшении демпфирования позволяет значительно снизить затраты на управление.

Основное отличие предложенного подхода от других селективных LQR-подходов глобальной настройки регуляторов состоит в выборе критерия селективности. Так, селективный LQR-метод в [32] основан на селективном дискретном преобразовании Фурье с настраиваемым в режиме реального времени окном частот. В [34] критерий селективности связан с ограничениями коммуникационной инфраструктуры и доступностью измеримых переменных. В [33] по идентифицируемому возмущению системы выбирается та или иная структура матрицы об-

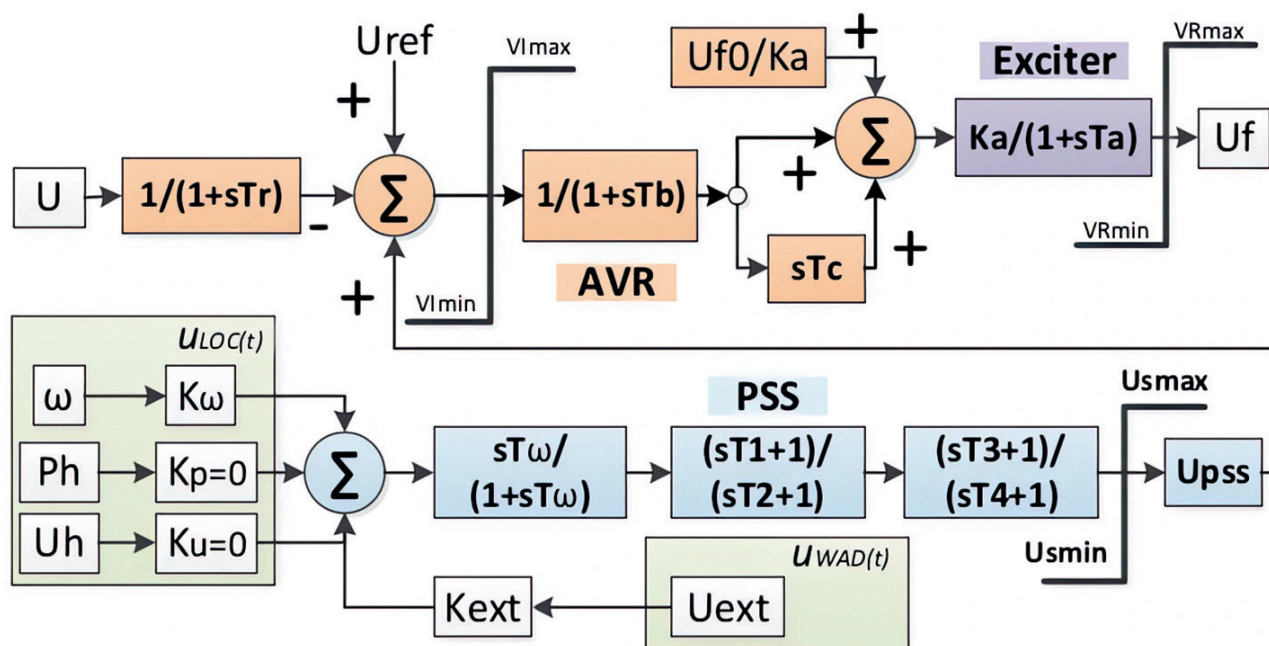


Рис. 5. Диаграмма автоматического регулятора напряжения и системного стабилизатора AVR (от англ. Automatic Voltage Regulator) + PSS на каждом генераторе сети

Fig. 5. Diagram of automatic voltage regulator and AVR power system stabilizer on each generator in the network

Таблица 2. Параметры системных стабилизаторов
Table 2. Parameters of system stabilizers

Локальный регулятор	Значения параметров
Автоматический регулятор напряжения	$K_a = 200$; $T_a = 0,15$; $T_r = 0,01$; $T_c = 1$; $T_b = 1$; $V_{Rmax} = 0,1$; $V_{Rmin} = -0,1$; $V_{lmax} = 0,1$; $V_{lmin} = -0,1$
Системный стабилизатор	$K_p = K_u = 0$; $K_w = 12$; $K_{ext} = 1$; $T_1 = 0,1$; $T_2 = 0,01$; $T_3 = 0,1$; $T_4 = 0,01$; $U_{smin} = -0,1$; $U_{smax} = 0,1$

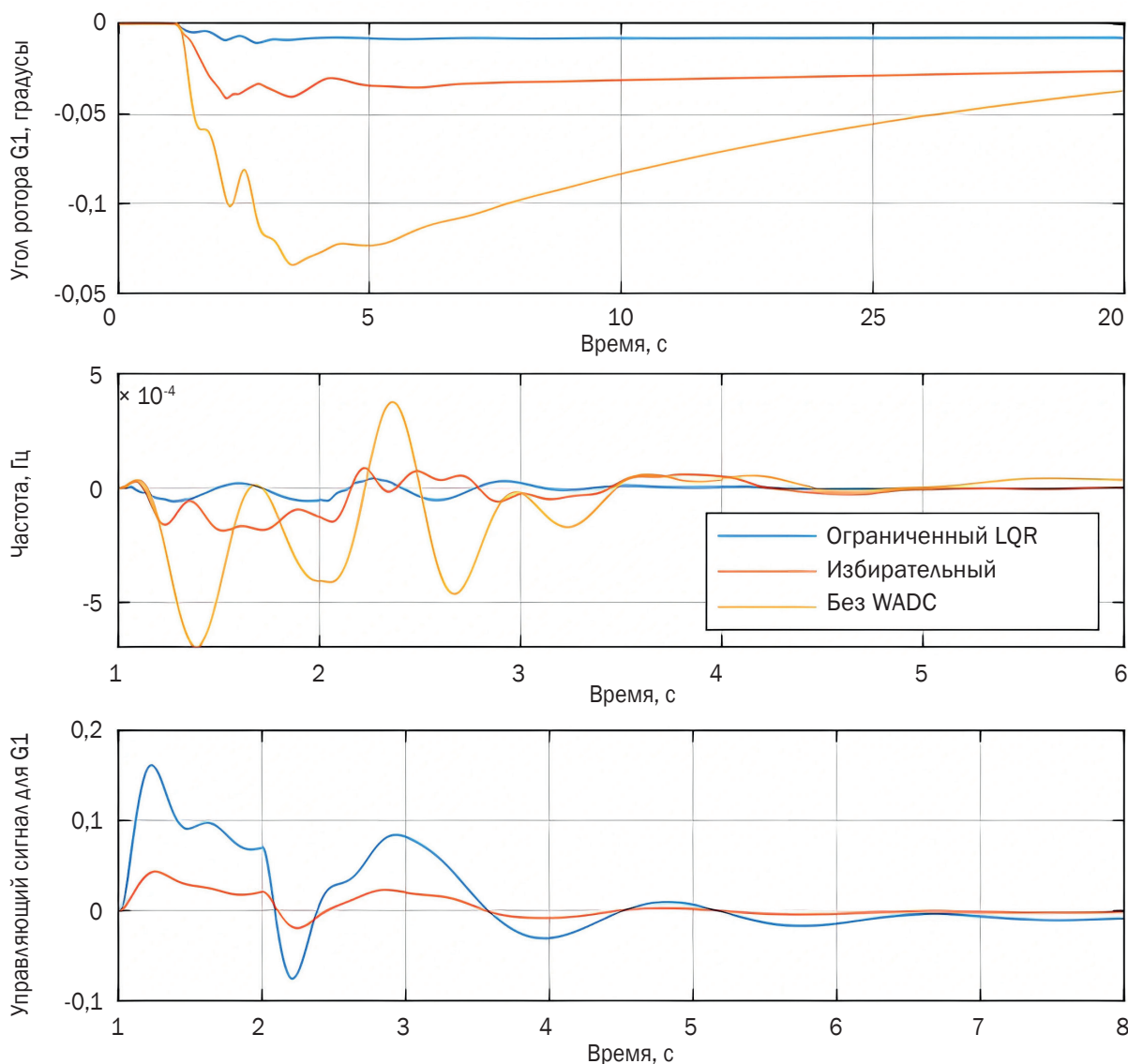


Рис. 6. Переходные процессы по углу ротора (сверху), частоте тока (в середине) и управляющий сигнал (снизу) генератора G1 при использовании ограниченного LQR-регулятора (синий), избирательного регулятора (красный) и без глобальных регуляторов (желтый)

Fig. 6. Transients in rotor angle (top), current frequency (middle), and control signal (bottom) of the G1 generator when using a limited linear-quadratic regulator (blue), a selective controller (red), and no global controllers (yellow).

ратной связи состояний. Прямое сравнение эффективности всех этих методов затруднено наличием в каждом случае своего набора учитываемых факторов и является предметом отдельного исследования. В нашем исследовании мы в первую очередь продемонстрировали эффект выбранного нами критерия селективности по набору мод.

ПОИСК МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ИСТОЧНИКА ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В СЕТИ

Вынужденные колебания (ВК) в современных ЭЭС могут возникать как в результате циклических нагрузок в сети, так и в

результате неправильной работы оборудования управления генератором. Таким образом, ВК могут представлять серьезную угрозу устойчивости ЭЭС, особенно когда они резонируют с собственными электромеханическими колебаниями системы [35]. Кроме того, ВК могут негативно влиять на алгоритмы управления для подавления свободных колебаний. Поэтому важно своевременно обнаруживать их и определять местоположение их источника в сети.

В исследовании [36] на основе концепции модального анализа по Ляпунову был предложен метод определения местополо-

жения источника вынужденных колебаний в энергосистеме в тех случаях, когда их частота близка к частоте собственных колебаний системы. Предложенные модальные показатели характеризуют энергию возмущений напряжения, накапливаемую в узлах под действием вынужденных колебаний. На основе соответствующего спектрального разложения из этой энергии вычитается составляющая, соответствующая резонансу между вынужденным и собственным колебанием. «Нерезонансная» часть показателя, рассчитанная в каждом узле сети, позволяет визуализировать профиль «нерезонансной» энергии на графе ЭЭС. На основе полученного профиля можно решить обратную задачу и определить местоположение источника вынужденных колебаний. Наиболее близкими к предложенному методу являются:

- метод [37], основанный на расчетах потоков энергии в сети;
- спектральные методы [38, 39].

В численном эксперименте в различные узлы тестовой модели IEEE с 68 шинами (подробно о ее структуре и настройках можно ознакомиться в отчете [29], порядок линейной модели – 167) вводились вынужденные колебания на частоте, близкой к собственной частоте системы. Электрическая схема этой системы показана на рис. 2. Исследовалась одна из межрайонных мод $-0,15 \pm 3,7j$ с частотой около 0,58 Гц. В ходе численного эксперимента источники вынужденных колебаний задавались на генераторах G1 – G12. Отклик ЭЭС на данные возмущения определялся путём прямого моделирования линейной модели, при этом для каждого узла

сети рассчитывались колебания амплитуды напряжения. В каждом узле сети были рассчитаны профили «нерезонансной» части соответствующей энергии возмущений напряжения, по которым можно визуализировать на графе местоположение источника вынужденных колебаний (см. рис. 7). Профиль предлагаемого модального показателя по Ляпунову может рассчитываться в узлах сети как на основе известной модели системы, так и на основе измеренных данных.

В литературе предложено много других методов как для обнаружения ВК, так и для их локализации. Их можно условно разделить на методы, использующие информацию о модели системы, и методы, основанные на данных, включающие их идентификацию и статистическую обработку. Примеры преимущественно основанных на данных подходов можно найти в [40], где предложен адаптивный стохастический метод идентификации для обнаружения ВК. В [41] представлен метод локализации ВК, основанный на динамической идентификации модели и принципиальном подходе максимального правдоподобия. В [42] сформулирован метод, построенный на данных, для идентификации различных механизмов возникновения ВК. Примеры преимущественно основанных на моделях подходов можно найти в [37], где предложен метод локализации ВК, основанный на расчете потоков энергии в сети. В работе [38] представлен аналитический спектральный подход для различения естественных и вынужденных колебаний. В статье [39] предложен метод обнаружения ВК на основе спектрального разложения

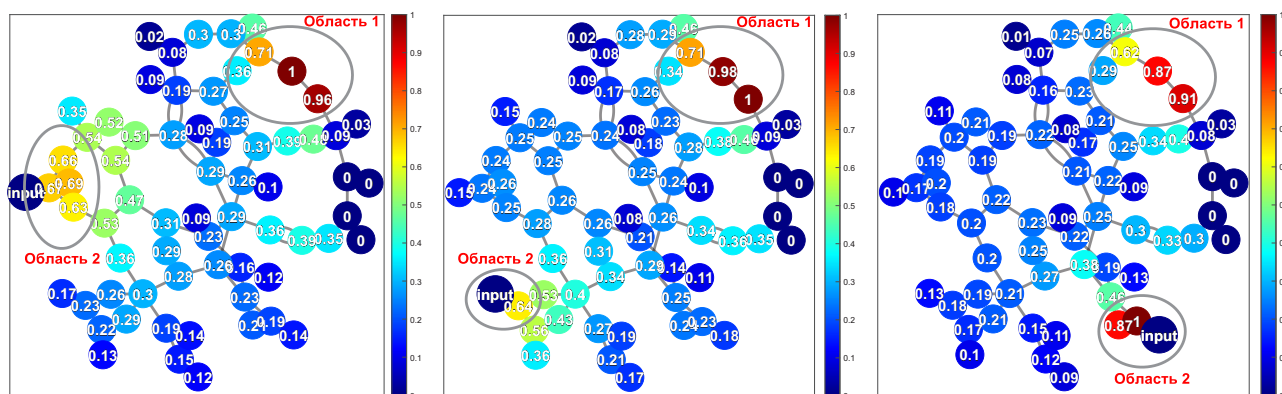


Рис. 7. Обнаруженные положения источников вынужденных колебаний в области 2 на графе энергосистемы на основе предложенного показателя

Fig. 7. Detected positions of sources of forced oscillations in region 2 on the graph of the power system based on the proposed indicator

сигналов. Несмотря на относительный успех различных подходов, разработка надежных методов, способных различать все виды ВК, остается важной и нерешенной проблемой. Сравнение этих методов с предложенным в данной работе потребует отдельного исследования и является предметом дальнейших исследований.

ОГРАНИЧЕНИЯ МЕТОДОВ И ПЕРСПЕКТИВЫ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Все приведенные в данной статье примеры основаны на использовании устойчивых линеаризованных моделей ЭЭС, в которых все собственные значения различны. Тем не менее спектральные разложения грамианов были получены и для систем с кратными корнями [16], а также для слабонелинейных [18] и неустойчивых систем [17]. Кроме этого, существуют конечные грамианы управляемости и наблюдаемости, которые являются решениями не алгебраического, а дифференциального уравнения Ляпунова. Теория спектральных разложений для этого случая также разработана и может использоваться для исследования неустойчивых систем.

По вычислительной сложности предлагаемый подход сопоставим с классическими методами линейного модального анализа. Следовательно, использование спектральных разложений грамианов не ограничивает возможности анализа систем сверхбольших размерностей, по сравнению с другими методами. Также, подобно другим методам модального анализа, предложенный подход имеет ограниченную применимость для нестационарных систем, а именно предполагается, что их динамическое поведение можно описать как плавную линеаризацию нелинейной системы, движущейся вдоль определенной траектории состояния. Тогда для целей анализа устойчивости при малых сигналах модель системы можно аппроксимировать как линейную систему с плавно изменяющимися параметрами [43]. Это означает, что описываемые в статье методы применимы к системам с гладкими нелинейностями и неприменимы к системам с разрывными нелинейностями. Отметим также, что предложенные методы строго обоснованы для оценки устойчивости только при малых возмущениях и могут

терять точность при больших возмущениях. Возможность их применения при больших возмущениях и в нестационарных режимах требует дополнительных исследований. Отметим также, что существующие методы модального анализа чувствительны к параметрам системы и теряют точность при оценке кратных собственных мод системы. В отличие от этого, модальные показатели на основе предлагаемого подхода сохраняют устойчивость при любых кратностях собственных чисел, поскольку имеют интерпретацию физически измеримых величин (см. например, теорему 1 в [6]).

В работе приведено несколько примеров того, как развитые в рамках модального анализа по Ляпунову методы были успешно применены к практическим задачам мониторинга и управления в электроэнергетике. Мы ожидаем, что спектральные разложения решений матричных уравнений, известных в теории управления, могут предоставить ключевой инструмент для разработки еще более широкого набора новых алгоритмов и интеллектуальных методов управления в макро- и микросетях. В качестве перспективных направлений для дальнейшего исследования можно выделить следующие задачи:

1. Мониторинг состояния и глобальный контроль опасных колебаний с учетом неопределенности и нестационарности.
2. Алгоритмы глобальной настройки регуляторов в сети с учетом ВИЭ.
3. Задачи диагностики оборудования в сети на основе выявления спектральных аномалий.
4. Оптимальное управление виртуальной инерцией и ее размещением в распределенной сети.
5. Управление и оптимальное расположение стабилизаторов и элементов системы мониторинга переходных режимов на графе ЭЭС.
6. Оценка предельных пропускных способностей и оптимального потокораспределения мощности в сети на основе «энергетических» критериев.

В заключение отметим, что в данной статье мы только анализируем результаты мониторинга, чтобы содержательно охарактеризовать колебания и их взаимодействия. Техническая же сторона мониторинга, связанная со сбором, передачей и синхронизацией

данных от синхронизированных векторных измерителей [44], а также методы идентификации спектра системы и ее собственных векторов по измеряемым данным известны из литературных источников и достаточно хорошо исследованы на практике [45–47].

Список источников

1. Gupta R., Zhao Wei, Kapania R.K. Controllability Gramian as control design objective in aircraft structural design optimization // American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal. 2020. Vol. 58. Iss. 9. P. 3199–3220. <https://doi.org/10.2514/1.J059102>.
2. Casadei G., De Wit C.C., Zampieri S. Model reduction based approximation of the output controllability Gramian in large-scale networks // IEEE Transactions on Control of Network Systems. 2020. Vol. 7. Iss. 4. P. 1778–1788. <https://doi.org/10.1109/TCNS.2020.3000694>.
3. Benner P., Goyal P., Duff I.P. Gramians, energy functionals, and balanced truncation for linear dynamical systems with quadratic outputs // IEEE Transactions on Automatic Control. 2022. Vol. 67. Iss. 2. P. 886–893. <https://doi.org/10.1109/TAC.2021.3086319>.
4. Dilip A.S.A. The controllability Gramian, the Hadamard product, and the optimal actuator/leader and sensor selection problem // IEEE Control Systems Letters. 2019. Vol. 3. Iss. 4. P. 883–888. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2019.2919278>.
5. Zhao Shiyu, Pasqualetti F. Networks with diagonal controllability Gramian: analysis, graphical conditions, and design algorithms // Automatica. 2019. Vol. 102. P. 10–18. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.12.038>.
6. Isakov A.B., Kutyakov E.Y., Tomin N.V., Panasetsky D.A., Abramnikov A.N., Dushin S.V. Estimation of the location of inter-area oscillations and their interactions in electrical power systems using Lyapunov modal analysis // International Journal of Electrical Power and Energy Systems. 2023. Vol. 153. P. 109374. <https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2023.109374>.
7. Ghosh S., Isbeih Yo.J., El Moursi M.S., El-Saadany E.F. Cross-Gramian model reduction approach for tuning power system stabilizers in large power networks // IEEE Transactions on Power Systems. 2019. Vol. 35. Iss. 3. P. 1911–1922. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2019.2924495>.
8. Bianchin G., Pasqualetti F. Gramian-based optimization for the analysis and control of traffic networks // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. 2020. Vol. 21. Iss. 7. P. 3013–3024. <https://doi.org/10.1109/TITS.2019.2922900>.
9. Baur U., Benner P., Feng Lihong. Model order reduction for linear and nonlinear systems: a system-theoretic perspective // Archives of Computational Methods in Engineering. 2014. Vol. 21. Iss. 4. P. 331–358. <https://doi.org/10.1007/s11831-014-9111-2>.
10. Bui H.H. The application of LQG balanced truncation algorithm to the digital filter design // Engineering, Technology and Applied Science Research. 2022. Vol. 12. Iss. 6. P. 9458–9463. <https://doi.org/10.48084/etasr.5235>.
11. Gajamannage K., Park Yo., Sadovski A. Geodesic Gramian denoising applied to the images contaminated with noise sampled from diverse probability distributions // IET Image Processing. 2023. Vol. 17. Iss. 1. P. 144–156. <https://doi.org/10.1049/ipr2.12623>.
12. Freitas F.D., Rommes J., Martins N. Gramian-based reduction method applied to large sparse power system descriptor models // IEEE Transactions on Power Systems. 2008. Vol. 23. Iss. 3. P. 1258–1270. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2008.926693>.
13. Antoulas A.C. Approximation of large-scale dynamical systems. Philadelphia: SIAM, 2005. 481 p. <https://doi.org/10.1137/1.9780898718713>.
14. Ядыкин И.Б. О свойствах грамианов непрерывных систем управления // Автоматика и телемеханика. 2010. № 6. С. 39–50. EDN: MTHAXD.
15. Behr M., Benner P., Heiland J. Solution formulas for differential Sylvester and Lyapunov equations // Calcolo. 2019. Vol. 56. Iss. 4. P. 51. <https://doi.org/10.1007/s10092-019-0348-x>.
16. Ядыкин И.Б., Исаков А.Б. Спектральные разложения для решений уравнений Сильвестра – Ляпунова – Крейна // Доклады Академии наук. 2017. Vol. 472. Iss. 4. P. 388–392. <https://doi.org/10.7868/S0869565217040065>. EDN: YKUMBH.
17. Ядыкин И.Б., Галяев И.А. Спектральные разложения грамианов и энергетических метрик непрерывных неустойчивых систем управления // Автоматика и телемеханика. 2023. № 10. С. 132–149. <https://doi.org/10.31857/S0005231023100112>. EDN: YCDMIQ.
18. Ядыкин И.Б., Исаков А.Б. Спектральные разложения решений уравнений Ляпунова для билинейных динамических систем // Доклады Академии наук. 2019. Т. 488. № 6. С. 599–603. <https://doi.org/10.31857/S0869-56524886599-603>. EDN: RBMTAU.
19. Vittal V., Bhatia N., Fouad A.A. Analysis of the inter-area mode phenomenon in power systems following large disturbances // IEEE Transactions on Power Systems. 1991. Vol. 6. Iss. 4. P. 1515–1521. <https://doi.org/10.1109/59.116998>.
20. Pariz N., Shanechi H.M., Vaahedi E. Explaining and validating stressed power systems behavior using modal series // IEEE Transactions on Power Systems. 2003. Vol. 18. Iss. 2. P. 778–785. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2003.811307>.

21. Arroyo J., Betancourt R., Messina A.R., Barocio E.D. Development of bilinear power system representations for small signal stability analysis // *Electric Power Systems Research*. 2007. Vol. 77. Iss. 10. P. 1239–1248. <https://doi.org/10.1016/j.epsr.2006.09.014>.
22. Iskakov A.B., Yadykin I.B. Lyapunov modal analysis and participation factors applied to small-signal stability of power systems // *Automatica*. 2021. Vol. 132. P. 109814. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109814>.
23. Perez-Arriaga I.J., Verghese G.C., Schweppe F.C. Selective modal analysis with applications to electric power systems. Part I: Heuristic introduction // *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*. 1982. Vol. PAS-101. Iss. 9. P. 3117–3125. <https://doi.org/10.1109/TPAS.1982.317524>.
24. Kundur P. *Power systems stability and control*. New York: McGraw-Hill, 1994. 1176 p.
25. Silva-Saravia H., Pulgar-Painemal H., Zaretski R. Chance-constrained optimal location of damping control actuators under wind power variability // *IEEE International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems*. 2018. <http://doi.org/10.1109/PMAPS.2018.8440536>.
26. Chompoobutrgool Yu., Vanfretti L. Identification of power system dominant inter-area oscillation paths // *IEEE Transactions on Power Systems*. 2013. Vol. 28. Iss. 3. P. 2798–2807. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2012.2227840>.
27. Chompoobutrgool Yu., Vanfretti L. Analysis of time delay effects for wide-area damping control design using dominant path signals // *IEEE PES General Meeting. Conference and Exposition*. 2014. <https://doi.org/10.1109/PESGM.2014.6938872>.
28. Milano F. An open source power systems analysis toolbox // *IEEE Transactions on Power Systems*. 2005. Vol. 20. Iss. 3. P. 1199–1206. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2005.851911>.
29. Singh A.K., Pal B.C. Report on the 68-bus, 16-Machine, 5-Area system // *IEEE PES task force on benchmark systems for stability controls*. 2013. Version 3.3. Режим доступа: https://www.researchgate.net/publication/311680574_IEEE_PES_Task_Force_on_Benchmark_Systems_for_Stability_Controls_Report_on_the_68-Bus_16-Machine_5-Area_System (дата обращения: 10.02.2026).
30. Zhang Yang, Bose A. Design of wide-area damping controllers for interarea oscillations // *IEEE Transactions on Power Systems*. 2008. Vol. 23. Iss. 3. P. 1136–1143. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2008.926718>.
31. Kataev D.E., Kutyakov E.Yu. Structurally constrained fuzzy selective LQ WADC based on the spectral decomposition of gramians // *IFAC-PapersOnLine*. 2024. Vol. 58. Iss. 13. P. 350–355. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2024.07.507>.
32. Jain A., Biyik E., Chakraborty A. A model predictive control design for selective modal damping in power systems // *Proceedings of the American Control Conference*. 2015. P. 4314–4319. <https://doi.org/10.1109/ACC.2015.7172007>.
33. Xie Ruichao, Kamwa I., Chung C.Y. A novel wide-area control strategy for damping of critical frequency oscillations via modulation of active power injections // *IEEE Transactions on Power Systems*. 2020. Vol. 36. Iss. 1. P. 485–494. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2003.11397>.
34. Jain A., Chakraborty A., Biyik E. An online structurally constrained LQR design for damping oscillations in power system networks // *American Control Conference*. Seattle, 2017. P. 2093–2098. <https://doi.org/10.23919/ACC.2017.7963261>.
35. Ghorbaniparvar M. Survey on forced oscillations in power system // *Journal of Modern Power Systems and Clean Energy*. 2017. Vol. 5. P. 671–682. <https://doi.org/10.1007/s40565-017-0273-4>.
36. Iskakov A.B., Kutyakov E.Yu., Kataev D.E. Locating the source of forced oscillations on the basis of Lyapunov modal analysis // *IFAC-PapersOnLine*. 2024. Vol. 58. Iss. 13. P. 685–690. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2024.07.561>.
37. Chen Lei, Min Yong, Hu Wei Tian. An energy-based method for location of power system oscillation source // *IEEE Transactions on Power Systems*. 2013. Vol. 28. Iss. 2. P. 828–836. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2012.2211627>.
38. Xie R., Trudnowski D. Distinguishing features of natural and forced oscillations // *IEEE Power and Energy Society General Meeting*. 2015. <https://doi.org/10.1109/PESGM.2015.7285781>.
39. Huang Tong, Freris N.M., Kumar P.R., Xie Li. A synchrophasor data-driven method for forced oscillation localization under resonance conditions // *IEEE Transactions on Power Systems*. 2020. Vol. 35. Iss. 5. P. 3927–3939. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2020.2982267>.
40. Arash S., Venkatasubramanian V.M. Inter-area resonance in power systems from forced oscillations // *IEEE Transactions on Power Systems*. 2015. Vol. 31. Iss. 1. P. 378–386. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2015.2400133>.
41. Delabays R., Lokhov A.Y., Tyloo M., Vuffray M. Locating the source of forced oscillations in transmission power grids // *PRX Energy*. 2023. Iss. 2. P. 023009. <https://doi.org/10.1103/PRXEnergy.2.023009>.
42. Wang Xiaozhe, Turitsyn K. Data-driven diagnostics of mechanism and source of sustained oscillations // *IEEE Transactions on Power Systems*. 2016. Vol. 31. Iss. 5. P. 4036–4046. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1506.00934>.
43. Gibbard M.J., Pourbeik P., Vowles D.J. *Small-signal stability, control and dynamic performance of power systems*. Adelaide: University of Adelaide Press, 2015. 658 p. <https://doi.org/10.20851/small-signal>.
44. Dosiek L., Pierre J.W., Trudnowski D.J. A comparative study of signal processing methods for estimating electromechanical modes from PMU data // *IEEE Transactions on Power Systems*. 2013. Vol. 28. Iss. 2. P. 1907–1919. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2012.2224387>.
45. Juang Joe, Pappa R.S. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1985. Vol. 8. Iss. 5. P. 620–627. <https://doi.org/10.2514/3.20031>.

46. Zhou N., Pierre J.W., Hauer J.F. Initial results in comparing methods for estimating damping and frequency of electromechanical oscillations from ambient signals // IEEE Power Engineering Society General Meeting. 2005. <https://doi.org/10.1109/PES.2005.1489679>.
47. Pierre B.J., Wilches-Bernal F., Schoenwald D.A. *A tutorial on modal analysis methods for power systems: Tech. Rep. SAND2019-11116*. Albuquerque: Sandia National Laboratories, 2019. 84 p.

References

1. Gupta R., Zhao Wei, Kapania R.K. Controllability Gramian as control design objective in aircraft structural design optimization. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. 2020;58(9):3199-3220. <https://doi.org/10.2514/1.J059102>.
2. Casadei G., De Wit C.C., Zampieri S. Model reduction based approximation of the output controllability Gramian in large-scale networks. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*. 2020;7(4):1778-1788. <https://doi.org/10.1109/TCNS.2020.3000694>.
3. Benner P., Goyal P., Duff I.P. Gramians, energy functionals, and balanced truncation for linear dynamical systems with quadratic outputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2022;67(2):886-893. <https://doi.org/10.1109/TAC.2021.3086319>.
4. Dilip A.S.A. The controllability Gramian, the Hadamard product, and the optimal actuator/leader and sensor selection problem. *IEEE Control Systems Letters*. 2019;3(4):883-888. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2019.2919278>.
5. Zhao Shiyu, Pasqualetti F. Networks with diagonal controllability Gramian: analysis, graphical conditions, and design algorithms. *Automatica*. 2019;102:10-18. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.12.038>.
6. Isakov A.B., Kutyakov E.Y., Tomin N.V., Panasetsky D.A., Abramnikov A.N., Dushin S.V. Estimation of the location of inter-area oscillations and their interactions in electrical power systems using Lyapunov modal analysis. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*. 2023;153:109374. <https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2023.109374>.
7. Ghosh S., Isbeih Yo.J., El Moursi M.S., El-Saadany E.F. Cross-Gramian model reduction approach for tuning power system stabilizers in large power networks. *IEEE Transactions on Power Systems*. 2019;35(3):1911-1922. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2019.2924495>.
8. Bianchin G., Pasqualetti F. Gramian-based optimization for the analysis and control of traffic networks. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*. 2020;21(7):3013-3024. <https://doi.org/10.1109/TITS.2019.2922900>.
9. Baur U., Benner P., Feng Lihong. Model order reduction for linear and nonlinear systems: a system-theoretic perspective. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 2014;21(4):331-358. <https://doi.org/10.1007/s11831-014-9111-2>.
10. Bui H.H. The application of LQG balanced truncation algorithm to the digital filter design. *Engineering, Technology and Applied Science Research*. 2022;12(6):9458-9463. <https://doi.org/10.48084/etasr.5235>.
11. Gajamannage K., Park Yo., Sadovski A. Geodesic Gramian denoising applied to the images contaminated with noise sampled from diverse probability distributions. *IET Image Processing*. 2023;17(1):144-156. <https://doi.org/10.1049/ipr2.12623>.
12. Freitas F.D., Rommes J., Martins N. Gramian-based reduction method applied to large sparse power system descriptor models. *IEEE Transactions on Power Systems*. 2008;23(3):1258-1270. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2008.926693>.
13. Antoulas A.C. *Approximation of large-scale dynamical systems*. Philadelphia: SIAM; 2005, 481 p. <https://doi.org/10.1137/1.9780898718713>.
14. Yadykin I.B. On properties of gramians of continuous control systems. *Automation and Remote Control*. 2010;6:39-50. (In Russ.). EDN: MTHAXD.
15. Behr M., Benner P., Heiland J. Solution formulas for differential Sylvester and Lyapunov equations. *Calcolo*. 2019;56(4):51. <https://doi.org/10.1007/s10092-019-0348-x>.
16. Yadykin I.B., Isakov A.B. Spectral decompositions for the solutions of Sylvester, Lyapunov, and Krein equations. *Doklady Akademii nauk*. 2017;472(4):388-392. (In Russ.). <https://doi.org/10.7868/S0869565217040065>. EDN: YKUMBH.
17. Yadykin I.B., Galyaev I.A. Spectral decompositions of gramians and energy metrics of continuous unstable control systems. *Automation and Remote Control*. 2023;84(10):1108-1121. (In Russ.). <https://doi.org/10.31857/S0005231023100112>. EDN: YCDMIQ.
18. Yadykin I.B., Isakov A.B. Spectral decompositions for the solutions of Lyapunov equations for bilinear dynamical systems. *Doklady Akademii nauk*. 2019;488(6):599-603. (In Russ.). <https://doi.org/10.31857/S0869-56524886599-603>. EDN: RBMTAU.
19. Vittal V., Bhatia N., Fouad A.A. Analysis of the inter-area mode phenomenon in power systems following large disturbances. *IEEE Transactions on Power Systems*. 1991;6(4):1515-1521. <https://doi.org/10.1109/59.116998>.
20. Pariz N., Shanechi H.M., Vaahedi E. Explaining and validating stressed power systems behavior using modal series. *IEEE Transactions on Power Systems*. 2003;18(2):778-785. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2003.811307>.
21. Arroyo J., Betancourt R., Messina A.R., Barocio E.D. Development of bilinear power system representations for small signal stability analysis. *Electric Power Systems Research*. 2007;77(10):1239-1248. <https://doi.org/10.1016/j.epsr.2006.09.014>.

22. Iskakov A.B., Yadykin I.B. Lyapunov modal analysis and participation factors applied to small-signal stability of power systems. *Automatica*. 2021;132:109814. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109814>.
23. Perez-Arriaga I.J., Verghese G.C., Schweppe F.C. Selective modal analysis with applications to electric power systems. Part I: Heuristic introduction. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*. 1982;PAS-101(9):3117-3125. <https://doi.org/10.1109/TPAS.1982.317524>.
24. Kundur P. *Power systems stability and control*. New York: McGraw-Hill; 1994, 1176 p.
25. Silva-Saravia H., Pulgar-Painemal H., Zaretski R. Chance-constrained optimal location of damping control actuators under wind power variability. In: *IEEE International Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems*. 2018. <http://doi.org/10.1109/PMAPS.2018.8440536>.
26. Chompoobutrgool Yu., Vanfretti L. Identification of power system dominant inter-area oscillation paths. *IEEE Transactions on Power Systems*. 2013;28(3):2798-2807. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2012.2227840>.
27. Chompoobutrgool Yu., Vanfretti L. Analysis of time delay effects for wide-area damping control design using dominant path signals. In: *IEEE PES General Meeting. Conference and Exposition*. 2014. <https://doi.org/10.1109/PESGM.2014.6938872>.
28. Milano F. An open source power systems analysis toolbox. *IEEE Transactions on Power Systems*. 2005;20(3):1199-1206. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2005.851911>.
29. Singh A.K., Pal B.C. Report on the 68-bus, 16-Machine, 5-Area system. *IEEE PES task force on benchmark systems for stability controls*. 2013. Version 3.3. Available from: https://www.researchgate.net/publication/311680574_IEEE_PES_Task_Force_on_Benchmark_Systems_for_Stability_Controls_Report_on_the_68-Bus_16-Machine_5-Area_System [Accessed 10th February 2026]. (In Russ.).
30. Zhang Yang, Bose A. Design of wide-area damping controllers for interarea oscillations. *IEEE Transactions on Power Systems*. 2008;23(3):1136-1143. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2008.926718>.
31. Kataev D.E., Kutyakov E.Yu. Structurally constrained fuzzy selective LQ WADC based on the spectral decomposition of gramians. *IFAC-PapersOnLine*. 2024;58(13):350-355. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2024.07.507>.
32. Jain A., Biyik E., Chakraborty A. A model predictive control design for selective modal damping in power systems. In: *Proceedings of the American Control Conference*. 2015:4314-4319. <https://doi.org/10.1109/ACC.2015.7172007>.
33. Xie Ruichao, Kamwa I., Chung C.Y. A novel wide-area control strategy for damping of critical frequency oscillations via modulation of active power injections. *IEEE Transactions on Power Systems*. 2020;36(1):485-494. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2003.11397>.
34. Jain A., Chakraborty A., Biyik E. An online structurally constrained LQR design for damping oscillations in power system networks. In: *American Control Conference*. Seattle; 2017, p. 2093-2098. <https://doi.org/10.23919/ACC.2017.7963261>.
35. Ghorbaniparvar M. Survey on forced oscillations in power system. *Journal of Modern Power Systems and Clean Energy*. 2017;5:671-682. <https://doi.org/10.1007/s40565-017-0273-4>.
36. Iskakov A.B., Kutyakov E. Yu., Kataev D.E. Locating the source of forced oscillations on the basis of Lyapunov modal analysis. *IFAC-PapersOnLine*. 2024;58(13):685-690. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2024.07.561>.
37. Chen Lei, Min Yong, Hu Wei Tian. An energy-based method for location of power system oscillation source. *IEEE Transactions on Power Systems*. 2013;28(2):828-836. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2012.2211627>.
38. Xie R., Trudnowski D. Distinguishing features of natural and forced oscillations. *IEEE Power and Energy Society General Meeting*. 2015. <https://doi.org/10.1109/PESGM.2015.7285781>.
39. Huang Tong, Freris N.M., Kumar P.R., Xie Li. A synchrophasor data-driven method for forced oscillation localization under resonance conditions. *IEEE Transactions on Power Systems*. 2020;35(5):3927-3939. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2020.2982267>.
40. Arash S., Venkatasubramanian V.M. Inter-area resonance in power systems from forced oscillations. *IEEE Trans Power Systems*. 2015;31(1):378-386. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2015.2400133>.
41. Delabays R., Lokhov A.Y., Tyloo M., Vuffray M. Locating the source of forced oscillations in transmission power grids. *PRX Energy*. 2023;2:023009. <https://doi.org/10.1103/PRXEnergy.2.023009>.
42. Wang Xiaozhe, Turitsyn K. Data-driven diagnostics of mechanism and source of sustained oscillations. *IEEE Transactions on Power Systems*. 2016;31(5):4036-4046. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1506.00934>.
43. Gibbard M.J., Pourbeik P., Vowles D.J. *Small-signal stability, control and dynamic performance of power systems*. Adelaide: University of Adelaide Press; 2015, 658 p. <https://doi.org/10.20851/small-signal>.
44. Dosiek L., Pierre J.W., Trudnowski D.J. A comparative study of signal processing methods for estimating electromechanical modes from PMU data. *IEEE Transactions on Power Systems*. 2013;28(2):1907-1919. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2012.2224387>.
45. Juang Joe, Pappa R.S. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1985;8(5):620-627. <https://doi.org/10.2514/3.20031>.
46. Zhou N., Pierre J.W., Hauer J.F. Initial results in comparing methods for estimating damping and frequency of electromechanical oscillations from ambient signals. *IEEE Power Engineering Society General Meeting*. 2005. <https://doi.org/10.1109/PES.2005.1489679>.
47. Pierre B.J., Wilches-Bernal F., Schoenwald D.A. *A tutorial on modal analysis methods for power systems: Tech. Rep. SAND2019-11116*. Albuquerque: Sandia National Laboratories, 2019. 84 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Кутяков Евгений Юрьевич,
научный сотрудник Лаборатории 82,
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН,
117997, Российская Федерация,
г. Москва, Варшавское шоссе, 45
✉ evgeniykutyakov@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-6492-3750>

Исаков Алексей Борисович,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник Лаборатории 82,
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН,
117997, Российская Федерация,
г. Москва, Варшавское шоссе, 45
iskakov@ipu.ru
<https://orcid.org/0000-0001-6954-8179>

Ядыкин Игорь Борисович,
доктор технических наук, профессор,
главный научный сотрудник Лаборатории 82,
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН,
117997, Российская Федерация,
г. Москва, Варшавское шоссе, 45
jadikin1@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0003-1435-7054>

Катаев Дмитрий Евгеньевич,
кандидат технических наук,
старший научный сотрудник Лаборатории 82,
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН,
117997, Российская Федерация,
г. Москва, Варшавское шоссе, 45
dekataev@ipu.ru
<https://orcid.org/0000-0001-9356-4507>

Шевляков Андрей Анатольевич,
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник Лаборатории 82,
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН,
117997, Российская Федерация,
г. Москва, Варшавское шоссе, 45
aash29@ipu.ru
<https://orcid.org/0000-0003-2558-3911>

Пересветова Инна Федоровна,
техник Лаборатории 82,
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН,
117997, Российская Федерация,
г. Москва, Варшавское шоссе, 45
790212@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Evgeniy Yu. Kutyakov,
Researcher at the Laboratory 82,
V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences
of Russian Academy of Sciences,
45, Varshavskoe Shosse, Moscow 117997,
Russian Federation
✉ evgeniykutyakov@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0001-6492-3750>

Alexey B. Isakov,
Cand. Sci. (Phys. – Math.),
Senior Researcher at the Laboratory 82,
V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences
of Russian Academy of Sciences,
45, Varshavskoe Shosse, Moscow 117997,
Russian Federation
iskakov@ipu.ru
<https://orcid.org/0000-0001-6954-8179>

Igor B. Yadykin,
Dr. Sci. (Eng.), Professor,
Chief Researcher at the Laboratory 82,
V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences
of Russian Academy of Sciences,
45, Varshavskoe Shosse, Moscow 117997,
Russian Federation
jadikin1@mail.ru
<https://orcid.org/0000-0003-1435-7054>

Dmitry E. Kataev,
Cand. Sci. (Eng.),
Senior Researcher at the Laboratory 82,
V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences
of Russian Academy of Sciences,
45, Varshavskoe Shosse, Moscow 117997,
Russian Federation
dekataev@ipu.ru
<https://orcid.org/0000-0001-9356-4507>

Andrey A. Shevlyakov,
Cand. Sci. (Phys. – Math.),
Senior Researcher at the Laboratory 82,
V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences
of Russian Academy of Sciences,
45, Varshavskoe Shosse, Moscow 117997,
Russian Federation
aash29@ipu.ru
<https://orcid.org/0000-0003-2558-3911>

Inna F. Peresvetova,
Technician at the Laboratory 82,
V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences
of Russian Academy of Sciences,
45, Varshavskoe Shosse, Moscow 117997,
Russian Federation
790212@mail.ru

Ахметзянов Атлас Валиевич,
кандидат технических наук,
старший научный сотрудник Лаборатории 82,
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН,
117997, Российская Федерация,
г. Москва, Варшавское шоссе, 45
awa@ipu.ru
<https://orcid.org/0009-0001-5685-3868>

Atlas V. Akhmetzyanov,
Cand. Sci. (Eng.),
Senior Researcher at the Laboratory 82,
V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian
Academy of Sciences,
45, Varshavskoe Shosse, Moscow 117997, Russian
Federation
awa@ipu.ru
<https://orcid.org/0009-0001-5685-3868>

Заявленный вклад авторов

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Authors' contribution

The authors contributed equally to this article.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Conflict of interests

The authors declare no conflict of interests.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

The final manuscript has been read and approved by all the co-authors.

Информация о статье

Статья поступила в редакцию 02.03.2026 г.; одобрена после рецензирования 17.04.2026 г.; принята к публикации 27.05.2026 г.

Information about the article

The article was submitted 02.03.2026; approved after reviewing 17.04.2026; accepted for publication 27.05.2026.